Soluzioni dello scritto del 7 settembre 2010

1) Per calcolare la probabilità che $k_m \leq M < k_{m+1}$ si può osservare che m estrazioni devono cadere prima (o uguale) di M e che $n-m$ estrazioni devono cadere dopo M; quindi

$$\mathbb{P}(k_m \leq M < k_{m+1}) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

dove naturalmente $m \leq M$.

Per calcolare il limite richiesto possiamo scrivere

$$\mathbb{P}(k_m \leq M < k_{m+1}) = \binom{n}{m}$$
$$\frac{(1-\frac{1}{M})(1-\frac{2}{M})\cdots(1-\frac{m-1}{M})(\frac{N}{M}-1)(\frac{N}{M}-1-\frac{1}{M})\cdots(\frac{N}{M}-1-\frac{n-m-1}{M})}{\frac{N}{M}(\frac{N}{M}-\frac{1}{M})\cdots(\frac{N}{M}-\frac{n-1}{M})}$$

da cui

$$\mathbb{P}(k_m \leq M < k_{m+1}) \to \binom{n}{m}\frac{(\frac{1}{\alpha}-1)^{n-m}}{\frac{1}{\alpha^n}} = \binom{n}{m}\alpha^m(1-\alpha)^{n-m}$$

---

2) i) n^{-n}

ii) $\binom{n}{k}(n-1)^{n-k}n^{-n}$

iii) $n^{n-1}n^{-n} = 1/n$

iv) $n^{n-k}n^{-n} = 1/n^k$

---

3) $m = 0$ quando A cade nel cerchio di raggio 1: quindi $p_0 = \frac{1}{n^2}$; per $m \geq 1$ il punto A cade nella corona circolare delimitata dal cerchio interno di raggio $2m-1$ e dal cerchio esterno di raggio $2m+1$: quindi

$$p_m = \frac{(2m+1)^2 - (2m-1)^2}{n^2} = \frac{8m}{n^2}$$

dove naturalmente $2m+1 < n$, cioè $m < n/2$. Se infine n è pari allora per $m = n/2$ risulta

$$p_{\frac{n}{2}} = \frac{(2m)^2 - (2m-1)^2}{n^2} = \frac{4m-1}{n^2} = \frac{2n-1}{n^2}$$

4) Risulta che $a < X < \frac{1}{2\sqrt{3}}$ e

$$\mathbb{P}(X \leq t) = 1 - \frac{(1-2\sqrt{3}t)^2}{(1-2\sqrt{3}a)^2}$$

la cui densità di probabilità è

$$f(t) = 4\sqrt{3}\,\frac{1-2\sqrt{3}t}{(1-2\sqrt{3}a)^2}$$

da cui

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} t f(t)\, dt = \frac{\sqrt{3}+12a}{18}$$

---

5) La variabile casuale Y è ancora una gaussiana $N(0,1)$; ma X e Y sono dipendenti (Y è una funzione deterministica di X).