Compito scritto di
*Calcolo delle probabilità* $1^a$ *UD*

---

**1.** Siano $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ variabili casuali indipendenti ed equidistribuite assumendo il valore 1 con probabilità $p$ ed il valore 0 con probabilità $1-p$. Poniamo $Y_i = 0$ se $X_i + X_{i+1}$ assume un valore pari, e poniamo $Y_i = 1$ se $X_i + X_{i+1}$ assume il valore 1. Calcolare il valore di aspettazione e la varianza della somma $S = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$.

**2.** Tre urne contengono rispettivamente 2 palline bianche e 3 nere nella prima, 2 palline bianche e due nere nella seconda e 3 palline bianche e 1 nera nella terza. Si prende una pallina dalla prima e la si mette nella seconda; poi si prende una pallina dalla seconda e la si mette nella terza; infine si prende una pallina dalla terza per porla nella prima. Ebbene
a) quale è la configurazione più probabile per la prima urna?
b) Calcolare la probabilità che le configurazioni finali delle tre urne siano le stesse delle iniziali.

**3.** Sia $(X, Y)$ un punto casuale del piano distribuito uniformemente nel cerchio unitario. Calcolare

$$\mathbb{P}\Big(\max\{|X|, |Y|\} < \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \;\Big|\; X^2 + Y^2 < \tfrac{1}{4}\Big)$$

**4.** Calcolare la densità di probabilità della variabile casuale $Z = X + Y$, supponendo che $X$ e $Y$ abbiano come densità di probabilità congiunta

$$f(x, y) = \tfrac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, \qquad x, y \geq 0.$$

**5.** Nell'intervallo $[0, 1]$ si scelgono a caso, indipendentemente tra loro, due punti $X$ e $Y$, che dividono l'intervallo in tre intervallini. Si calcoli la distribuzione di probabilità
a) del più piccolo degli intervallini,
b) del più grande.

*Povo*, 8 settembre 2005