

Compito scritto di
Calcolo delle probabilità 1^a UD

1. Siano X_1, X_2, \dots, X_{n+2} variabili casuali indipendenti ed equidistribuite che assumono il valore 1 con probabilità p ed il valore 0 con probabilità $1 - p$. Poniamo $Y_i = 0$ se $X_i + X_{i+2}$ assume un valore pari, e poniamo $Y_i = 1$ se $X_i + X_{i+2}$ assume un valore dispari. Calcolare il valore di aspettazione e la varianza della somma $S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$.

2. Due sottoinsiemi A_1 e A_2 sono estratti (indipendentemente) *a caso* dall'insieme $A = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ in modo tale che ogni elemento di A sia incluso nell'insieme A_i con probabilità p indipendentemente dagli altri elementi. La probabilità che ciascun elemento non sia incluso è $q = 1 - p$. Trovare la probabilità che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

3. Sia (X, Y) un punto casuale del piano distribuito uniformemente nel cerchio unitario. Calcolare

$$\mathbb{P}\left(\max\{|X|, |Y|\} < \frac{1}{2} \mid |X| + |Y| < 1\right)$$

4. Se X è distribuito uniformemente in $[0, 1]$ e y è un numero reale con $0 < y < 1$, trovare la distribuzione della variabile casuale $Z = X^2 - yX$.

5. Supponiamo che sia p la probabilità che un figlio sia maschio, indipendentemente tra figli diversi. Una coppia desidera due figli ma se sono dello stesso sesso insiste fino ad avere figli di sesso diverso. Qual è la probabilità che si arrivi così a n figli?. Qual è il numero medio di figli?