Compito scritto di

Calcolo delle probabilità 1^a *UD*

1. Dati n dadi simili tali che la probabilità di ottenere 6 con ognuno di essi sia p, $(0 < p < 1)$, si lanci ognuno degli n dadi una volta e sia p_n la probabilità di ottenere un numero dispari di 6. Mostrare che p_n soddisfa l'equazione alle differenze

$$p_n + (2p - 1)p_{n-1} = p,$$

trovando una forma esplicita della soluzione.

2. Siano le variabili casuali $X_1, X_2, \dots$ indipendenti con la stessa distribuzione di probabilità

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \tfrac{1}{2} \qquad i = 1, 2, \dots$$

Definiamo $Y_i = X_i - X_{i+2}$, $i = 1, 2, \dots$.
a) Calcolare la distribuzione di probabilità comune delle Y_i e mostrare che le variabili casuali Y_i e Y_{i+1} sono indipendenti.
b) Calcolare la media e la varianza della variabile casuale $R_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $n \geq 2$.

3. Una segretaria può scegliere tre percorsi diversi A, B, C per andare al luogo di lavoro. Sceglie il percorso indipendentemente dal tempo atmosferico. Se piove, le probabilità di arrivare tardi seguendo A, B, C, sono 0.06, 0.15, 0.12, rispettivamente. Le probabilità corrispondenti, se non piove, sono 0.05, 0.10, 0.15.
(a) Sapendo che in un dato giorno con bel tempo la segretaria arrivi tardi, qual è la probabilità che abbia scelto il percorso C?
Supponiamo che in media piova ogni quattro giorni.
(b) Sapendo che in un dato giorno la segretaria arrivi tardi, qual è la probabilità che in quel giorno piova?

4. Data una successione di variabili casuali indipendenti X_n distribuite come Poisson di parametro λ, sia N il numero della prima variabile casuale diversa da zero. Determinare le distribuzioni di probabilità delle variabili casuali N e X_N.

5. Siano U e V due variabili casuali indipendenti ed uniformemente distribuite in $[0, 1]$. Definiamo $X = -\alpha^{-1} \log U$ e $Y = -\log V$. Mostrare che, condizionatamente all'evento $Y \geq \frac{1}{2}(X - \alpha)^2$, X ammette come funzione densità $f(x)$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \text{for } x > 0$$

Povo, 11 luglio 2012