Compito scritto di
Calcolo delle probabilità 1^a *UD*

1. Si eseguano n estrazioni a caso senza rimpiazzo da un'urna contenente N palline numerate da 1 ad N, disponendo i numeri estratti in ordine crescente $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n$. Calcolare la probabilità che $k_m \leq M < k_{m+1}$, dove m ed M sono interi fissati minori di N. Calcolare il limite di questa probabilità, per N ed $M \to \infty$ con la condizione che $M/N \to \alpha \in [0,1]$ fissato.

2. Consideriamo l'insieme F di tutte le funzioni definite su $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ e a valori nello stesso insieme I_n. Si estragga a caso una funzione f da F. Calcolare la probabilità che
i) f sia la funzione costante uguale ad 1;
ii) fissato $i \in I_n$, $f^{-1}(i)$ abbia k elementi;
iii) l'elemento i sia mandato in j;
iv) f mandi gli elementi $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ rispettivamente negli elementi $j_1, j_2, \ldots, j_k$.

3. Consideriamo n circonferenze concentriche (di centro O) $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n$ tali che il raggio di $\mathcal{C}_k$ sia esattamente k. Si scelga un punto A a caso nel cerchio con circonferenza $\mathcal{C}_n$; si consideri il triangolo equilatero ABC con un vertice A centrato in O. Calcolare la probabilità p_m che la frontiera del triangolo intersechi esattamente m circonferenze, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

4. Si lanci a caso un disco D di raggio a in un triangolo equilatero di lato 1 in modo che il disco sia interamente contenuto nel triangolo. Si calcoli la distribuzione di probabilità della distanza X del centro del disco dai lati del triangolo. Calcolare inoltre il suo valor medio.

5. Sia X una variabile casuale gaussiana $N(0,1)$. Sia $a > 0$, definiamo la variabile casuale Y come

$$Y = \begin{cases} X & \text{if } |X| < a \\ -X & \text{if } |X| \geq a. \end{cases}$$

Calcolare la distribuzione di probabilità di Y. Sono X ed Y indipendenti?

Povo, 7 settembre 2010