Calcolo dell'integrale di $e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}$

Indichiamo il prodotto scalare con

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle = xx' + yy'$$

Con queste notazioni la forma quadratica si scrive

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

oppure in maniera più concisa

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \langle A\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Supponiamo che la forma quadratica $ax^2 + 2bxy + cy^2$ sia definita positiva: in altre parole $a > 0$ e $ac - b^2 > 0$ (e di conseguenza anche $c > 0$).

Per calcolare gli autovalori consideriamo

$$\det \left\{ \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -b & \lambda - c \end{pmatrix} \right\} = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2) = 0$$

Risulta facilmente che

$$\lambda_1 = \frac{a + c - \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{a + c + \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2}$$

con le proprietà $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, $\lambda_1\lambda_2 = ac - b^2$. Per trovare i corrispondenti autovettori $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ ($A\boldsymbol{u}_1 = \lambda_1\boldsymbol{u}_1$ e $A\boldsymbol{u}_2 = \lambda_2\boldsymbol{u}_2$) impostiamo le equazioni

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_1 = \rho_1 b, \quad \beta_1 = \rho_1(\lambda_2 - a)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = \rho_2 b, \quad \beta_2 = \rho_2(\lambda_1 - a)$$

scegliendo poi ρ_1 e ρ_2 in modo che

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1.$$

Si verificano le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0 \\
&(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 \\
&(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2 = 2 = 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = 2(\beta_1^2 + \beta_2^2) \\
&1 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2
\end{aligned}$$

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$U^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$U^*U = I$$

$$UU^* = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 & \beta_1^2 + \beta_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(UU^*) = 1 = 1 - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 \Longrightarrow \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0$$

$$UU^* = I$$

$$AU = U\Lambda, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \alpha_1\tilde{x} + \alpha_2\tilde{y} \\ y = \beta_1\tilde{x} + \beta_2\tilde{y} \end{cases}$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2$$

Quindi

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2)}\mathsf{d}\tilde{x}\mathsf{d}\tilde{y} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} = \frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$$

Si può procedere anche così: scriviamo

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2$$

e consideriamo il seguente cambiamento di variabili

$$\tilde{x} = \sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}}y$$

$$\tilde{y} = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{\sqrt{a}}y$$

Calcolando la matrice Jacobiana ed il suo determinante otteniamo

$$\mathsf{d}\tilde{x}\mathsf{d}\tilde{y} = \sqrt{ac - b^2}\, \mathsf{d}x\mathsf{d}y$$

Quindi

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)}\frac{\mathsf{d}\tilde{x}\mathsf{d}\tilde{y}}{\sqrt{ac - b^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{ac - b^2}}$$

Siano X_1 e X_2 due variabili casuali gaussiane indipendenti di media e varianza rispettivamente m_1, σ_1^2 e m_2, σ_2^2. La somma $X_1 + X_2$ ha densità di probabilità data dalla convoluzione

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-y-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}\, \mathsf{d}y$$

Ora risulta

$$\frac{(x-y-m_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2} = \left(\frac{1}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_2^2}\right)y^2 - 2\left(\frac{x-m_1}{2\sigma_1^2} + \frac{m_2}{2\sigma_2^2}\right)y + \left(\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{m_2^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

Denotiamo

$$a = \frac{1}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_2^2}$$

$$b = \frac{x-m_1}{2\sigma_1^2} + \frac{m_2}{2\sigma_2^2}$$

e

$$c = \frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{m_2^2}{2\sigma_2^2}$$

Abbiamo

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \int_R e^{-(ay^2-2by+c)}\,\mathsf{d}y$$

Come nel caso precedente scriviamo

$$ay^2 - 2by + c = \left(\sqrt{a}x - \frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a}$$

e come nel caso precedente otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}} \int_R e^{-(ay^2-2by+c)}\,\mathsf{d}y = e^{-\frac{ac-b^2}{a}} \frac{\pi}{\sqrt{a}}$$

Quindi

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{ac-b^2}{a}} \frac{\pi}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} e^{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}$$

Quindi la somma di due gaussiane indipendenti è una gaussiana con media la somma delle media e varianze la somma delle varianze!

Possiamo quindi dedurre che la somma $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, se ciascuna variabile casuale è gaussiana e se sono tra loro indipendentied equidistribuite, è una gaussiana di media nm e varianza $n\sigma^2$, da cui

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

è una gaussiana di media 0 e varianza 1.