Contiamo in n lanci di una moneta in quanti modi si può presentare $k \leq n$ volte "testa". Denotiamo questo numero con $N_{n,k}$.
1. Risulta che $N_{n,k} = N_{n,n-k}$ perché è equivalente contare il numero di volte che si presenta "testa" oppure "croce".
2. È facile contare nei seguenti casi particolari: $N_{n,0} = N_{n,n} = 1$.
3. Risulta facile anche il conteggio per $k = 1$ (o per $k = n-1$ per la proprietà 1.), cioè $N_{n,1} = N_{n,n-1} = n$.
4. Risulta infine valida l'identità $N_{n,k} = N_{n-1,k-1} + N_{n-1,k}$ in base alla divisione di tutte le configurazioni con k "teste" in quelle configurazioni che iniziano con "testa" (che si contano come $N_{n-1,k-1}$) e quelle che iniziano con "croce" (che si contano come $N_{n-1,k}$).
Se disponiamo i valori $N_{n,k}$ al modo seguente:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & N_{1,0} & & N_{1,1} & & & \\
 & & N_{2,0} & & N_{2,1} & & N_{2,2} & & \\
 & N_{3,0} & & N_{3,1} & & N_{3,2} & & N_{3,3} & \\
N_{4,0} & & N_{4,1} & & N_{4,2} & & N_{4,3} & & N_{4,4} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

e utilizzando le proprietà 2., 3. e 4. abbiamo che il quadro diventa

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

che è un modo operativo per calcolare i vari $N_{n,k}$. Anzi qualsiasi successione di numeri $M_{n,k}$ che verifica 1., 2., 3. e 4. dà luogo alla stessa sequenza, cioè $M_{n,k} = N_{n,k}$. Definendo per esempio

$$M_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

dove utilizziamo la notazione $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$, otteniamo una successione di valori che verica 1., 2., 3. e 4. ! Quindi abbiamo anche la relazione

$$N_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Introduciamo ancora la notazione

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ponendo per convenienza $0! = 1$; scriveremo infine

$$N_{n,k} = \binom{n}{k}.$$

Qualche considerazione. Usando la 4. ripetutamente otteniamo

$$N_{n,k} = N_{n-1,k-1} + N_{n-1,k}$$

$$N_{n-1,k} = N_{n-2,k-1} + N_{n-2,k}$$

$$\vdots$$

$$N_{k+1,k} = N_{k,k-1} + N_{k,k}$$

concludendo con

$$N_{n,k} = N_{n-1,k-1} + N_{n-2,k-1} + N_{n-3,k-1} + \ldots + N_{k,k-1} + N_{k-1,k-1}$$

dove abbiamo utilizzato l'uguaglianza $N_{k,k} = 1 = N_{k-1,k-1}$. Il numero di addendi nella espressione precedente è $n-k+1$. In particolare

$$N_{n,1} = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n$$

con $n-1+1 = n$ termini, come già sapevamo. Proseguendo

$$N_{n,2} = (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$$

avendo $n-2+1 = n-1$ termini. A questo punto utilizziamo l'identità

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \ldots + m = \frac{m(m+1)}{2}}$$

che potremo dimostrare considerando

$$\begin{array}{rcccccccc} x & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & m \\ & = & m & + & (m-1) & + & \ldots & + & 1 \end{array}$$

e sommando termine a termine otteniamo $2x = m(m+1)$. Nel caso nostro otteniamo

$$N_{n,2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Consideriamo ancora il caso $k = 3$: i termini sono $n - 3 + 1 = n - 2$ e utilizzando il risultato precedente abbiamo

$$N_{n,3} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-2)(n-3)}{2} + \cdots + \frac{2 \cdot 1}{2}$$

Osservando che sommando a due a due gli addendi otteniamo quadrati possiamo scrivere

$$N_{n,3} = (n-2)^2 + (n-4)^2 + \cdots .$$

Conviene distinguere il caso di n pari e il caso di n dispari: per il caso pari, indicando $n = 2\ell$, abbiamo $\ell - 1$ termini

$$N_{2\ell,3} = 2^2(\ell-1)^2 + 2^2(\ell-2)^2 + \cdots + 2^2 = 2^2\left[(\ell-1)^2 + (\ell-2)^2 + \cdots + 1^2\right].$$

Per il caso dispari, $n = 2\ell + 1$ abbiamo ℓ termini

$$N_{2\ell+1,3} = (2\ell-1)^2 + (2\ell-3)^2 + \cdots + 1^2.$$

Utilizziamo ora l'identità

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}}.$$

che si può dimostrare facilmente per induzione. Nel caso pari abbiamo

$$N_{2\ell,3} = 2^2\left[(\ell-1)^2 + (\ell-2)^2 + \cdots + 1^2\right] = 2^2\frac{(\ell-1)\ \ell\ (2\ell-1)}{6}$$

che potremo riscrivere (usando n al posto di 2ℓ)

$$N_{2\ell,3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Per il caso dispari conviene considerare

$$\begin{aligned} N_{2\ell+1,3} &= (2\ell-1)^2 + (2\ell-3)^2 + \cdots + 1^2 = \\ &= \left\{(2\ell)^2 + (2\ell-1)^2 + \cdots + 1^2\right\} - 2^2\left\{\ell^2 + (\ell-1)^2 + \cdots + 1^2\right\} \end{aligned}$$

da cui

$$N_{2\ell+1,3} = \frac{2\ell(2\ell+1)(4\ell+1)}{6} - 2^2\frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6} = \frac{(2\ell+1)\,2\ell\,(2\ell-1)}{6}$$

che potremo riscrivere anche in questo caso (usando n al posto di $2\ell+1$)

$$N_{2\ell,3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Questo suggerisce la congettura $N_{n,k} = \binom{n}{k}$.

Consideriamo 4 oggetti distinti $\{a, b, c, d\}$. Il numero dei modi di disporre in fila i quattro oggetti è 4!=24:

abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb,
bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca,
cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba,
dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba

Se alcuni oggetti sono uguali, per esempio "a=c" e "b=d", allora alcune configurazioni coincidono

abab, abba, aabb, aabb, abba, abab,
baab, baba, baab, baba, bbaa, bbaa,
aabb, aabb, abab, abba, abab, abba,
baba, baab, bbaa, bbaa, baab, baba

Quindi le permutazioni effettive si riducono a

abab, abba, aabb,
baab, baba, bbaa

Cioè, le permutazioni di 4 oggetti, di cui 2 sono uguali e gli altri due sono uguali, sono 6, e questo si può calcolare come

$$6 = \frac{4!}{2!\,2!}$$

In generale il numero di permutazioni, "lunghe" r, di n oggetti, dove compaiono r_1 copie dell'oggetto 1, r_2 copie dell'oggetto 2, $\ldots$, r_n copie dell'oggetto n — dove necessariamente deve risultare

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r$$

— è dato dalla formula

$$\frac{r!}{r_1!\, r_2! \cdots r_n!}.$$