Compito scritto di

Calcolo delle probabilità 1^a *UD*

---

1. In un'urna ci sono m (≥ 3) palline bianche ed n palline nere. Se ne estrae una (senza guardarla) e la si getta. Successivamente si estraggono due palline: esse sono entrambe bianche. Qual è la probabilità che la pallina gettata via sia anch'essa bianca?

La probabilità x di estrarre due palline bianche è data da

$$\begin{aligned} x =& \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m-1}{m+n-1} \cdot \frac{m-2}{m+n-2} + \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n-1} \cdot \frac{m-1}{m+n-2} \\ =& \frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)} \end{aligned}$$

Siccome la probabilità y di estrarre 3 palline bianche è data da

$$y = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m-1}{m+n-1} \cdot \frac{m-2}{m+n-2}$$

la probabilità che la pallina gettata via sia anch'essa bianca sapendo di averne estratte successivamente due bianche è data da

$$\frac{y}{x} = \frac{m-2}{m+n-2}.$$

2. Si lancino tre dadi fino a che, pagando ogni volta una somma S, non si presentino 3 facce diverse. In tal caso, se una faccia presenta il numero 1, si vince una somma V. Quale relazione ci deve essere tra S e V perché il gioco sia equo?

La probabilità p che in un lancio appaiano 3 facce diverse è data da

$$p = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}.$$

Il gioco s'arresta ad un tempo aleatorio; quindi anche la somma sborsata è aleatoria. Il valor medio della somma sborsata è

$$S \sum_{k=1}^{\infty} k\, p\, (1-p)^k = \frac{S}{p}.$$

D'altra parte la probabilità che compaia l'uno fra le tre facce è data da

$$3\, \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

e quindi in media vinco $V/2$. In un gioco equo le due medie sono uguali, quindi

$$S = \frac{5}{18} V.$$

Per esempio, per vincere 900 €, bisogna pagare ogni lancio 250 €.

3. Supponiamo di avere r monete $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_r$, dove la moneta i-esima M_i abbia probabilità p_i che esca testa. Dall'insieme $S = \{1, 2, 3, \ldots, N\}$ vengono formati r sottoinsiemi $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_r$ al modo seguente: per ogni elemento $k \in S$, indipendentemente dagli altri elementi, si lanciano le r monete; per ogni i da 1 ad r, se la moneta i-esima presenta *testa* allora l'elemento k è un elemento dell'insieme A_i, altrimenti no. Calcolare la probabilità che gli r sottoinsiemi siano a due a due disgiunti.

Affinché gli insiemi siano a due a due disgiunti deve risultare che tra le r monete testa appaia al più una volta: quindi, per esempio l'1, o non compare in nessun insieme — e ciò capita con probabilità $Q = (1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_r)$ — oppure solo una volta con probabilità

$$\begin{aligned} Q' &= p_1(1-p_2)\cdots(1-p_r) + (1-p_1)p_2(1-p_3)\cdots(1-p_r) + \ldots + (1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_{r-1})p_r \\ &= Q\Big(\frac{p_1}{1-p_1} + \frac{p_2}{1-p_2} + \cdots + \frac{p_r}{1-p_r}\Big) \end{aligned}$$

E quindi la risposta è data da

$$\left[Q\Big(1 + \frac{p_1}{1-p_1} + \frac{p_2}{1-p_2} + \cdots + \frac{p_r}{1-p_r}\Big)\right]^N$$

4. Siano X ed Y variabili casuali indipendenti, entrambe distribuite in modo esponenziale di parametri rispettivamente λ e μ. Sia $U = \min\{X, Y\}$, $V = \max\{X, Y\}$ e $W = V - U$.

a) Calcolare $\mathbb{P}(U = X)$.

b) Mostrare che U e W sono indipendenti.

Calcoliamo $\mathbb{P}(U \le t, W \le s)$. Abbiamo che

$$\mathbb{P}(U \le t, W \le s) = \mathbb{P}(X < Y, U \le t, W \le s) + \mathbb{P}(X \ge Y, U \le t, W \le s)$$

Per $\mathbb{P}(X < Y, U \le t, W \le s)$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < Y, U \le t, W \le s) &= \mathbb{P}(X < Y, X \le t, Y - X \le s) = \mathbb{P}(X \le t, X < Y < X + s) \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \int_x^{x+s} \mu e^{-\mu y} dy\, dx = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}(e^{-\mu x} - e^{-\mu(x+s)})\, dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t})(1 - e^{-\mu s}) \end{aligned}$$

Da cui per t e s tendenti all'infinito abbiamo

$$\mathbb{P}(U = X) = \mathbb{P}(X < Y) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \ge Y, U \le t, W \le s) &= \mathbb{P}(X \ge Y, Y \le t, X - Y \le s) = \mathbb{P}(Y \le t, Y \le X < Y + s) \\ &= \int_0^t \mu e^{-\mu y} \int_y^{y+s} \lambda e^{-\lambda x} dx\, dy = \int_0^t \mu e^{-\mu y}(e^{-\lambda y} - e^{-\lambda(y+s)})\, dy \\ &= \frac{\mu}{\lambda+\mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t})(1 - e^{-\lambda s}) \end{aligned}$$

Sommando otteniamo

$$\mathbb{P}(U \leq t, W \leq s) = (1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) \left(1 - \frac{\lambda e^{-\mu s} + \mu e^{-\lambda s}}{\lambda + \mu}\right)$$

Da cui per $s \to \infty$ otteniamo $\mathbb{P}(U \leq t) = (1 - e^{-(\lambda+\mu)t})$. Invece per $t \to \infty$ otteniamo

$$\mathbb{P}(W \leq s) = \left(1 - \frac{\lambda e^{-\mu s} + \mu e^{-\lambda s}}{\lambda + \mu}\right)$$

da cui l'indipendenza.

5. Si distribuiscano n palline in k urne in modo che valga la statistica di Maxwell-Boltzmann.

a) Quale è la probabilità di trovare r palline nell'ultima urna?

b) Quale è la probabilità di trovarne r nell'ultima e s nella prima?

c) Nell'ultimo caso qual è il valor medio del numero totale di palline nella prima e nell'ultima urna?

Per a) la risposta è

$$\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}=n-r} \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_{r-1}!r!} k^{-n} = \binom{n}{r} \left(\frac{1}{k}\right)^r \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{n-r}.$$

Per b) la risposta è

$$\sum_{k_2+\cdots+k_{r-1}=n-r-s} \frac{n!}{s!k_2!\cdots k_{r-1}!r!} k^{-n} = \frac{n!}{s!r!(n-r-s)!} \left(\frac{1}{k}\right)^{r+s} \left(1 - \frac{2}{k}\right)^{n-r-s}.$$

Per calcolare il valor medio si può usare il risultato precedente oppure, più semplicemente, osservando che il valor medio di palline in ogni urna è sempre lo stesso; d'altra parte il valor medio del totale delle urne è n e quindi il valore medio del numero di palline in ogni scatola è n/k. La risposta è quindi

$$2\,\frac{n}{k}$$

Povo, 3 settembre 2007