Compito scritto di

Calcolo delle probabilità 1^a *UD*

---

1. Gli insiemi Λ_1, Λ_2 sono estratti con rimessa dall'insieme di tutti i sottoinsiemi di $S = \{1, 2, 3, \ldots, N\}$. Calcolare la probabilità che $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$.

$$\mathbb{P}(\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{1}{2^N} \frac{2^{N-k}}{2^N} = \left(\frac{3}{4}\right)^N$$

2. Tre clienti si presentano ad un ufficio con due sportelli e vengono serviti in tempi indipendenti esponenziali di parametro λ. Trovare la distribuzione di probabilità del tempo impiegato per servirli tutti.

$$T = \max\{\min\{T_1, T_2\} + T_3, \max\{T_1, T_2\}\}$$
$$\mathbb{P}(T \le t) = \mathbb{P}(\min\{T_1, T_2\} + T_3 \le t, T_1 \le t, T_2 \le t)$$
$$\mathbb{P}(T \le t) = 2\,\mathbb{P}(T_1 + T_3 \le t, T_1 \le T_2 \le t)$$
$$\mathbb{P}(T \le t) = 2 \int_0^t \mathbb{P}(T_1 + T_3 \le t, T_1 \le s)\mathbb{P}(T_2 \in ds)$$
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \le t) &= 2 \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds \int_0^s \lambda e^{-\lambda x} dx \int_0^{t-x} \lambda e^{-\lambda y} dy \\ &= 2 \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds \int_0^s \lambda (e^{-\lambda x} - e^{-\lambda t}) dx \\ &= 2 \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}(1 - e^{-\lambda s} - \lambda s e^{-\lambda t}) ds \\ &= 1 - 4e^{-\lambda t} + 3e^{-2\lambda t} + 2\lambda t e^{-2\lambda t}\end{aligned}$$

3. Le variabili casuali X, Y sono indipendenti con distribuzione normale $N(0, 1)$. Le variabili $U = X + Y$ e $V = X - Y$ formano un sistema gaussiano. Sono esse indipendenti?
Facoltativo: mostrare che la coppia U, V forma un sistema gaussiano.

$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 0$, $\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(X - Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = 0$
$\mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(X^2 - Y^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2) = 1 - 1 = 0$
quindi $\mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V)$, cioè U e V sono **non correlate**; siccome la coppia (U, V) forma un sistema gaussiano allora la **non correlazione** implica l'**indipendenza**.

4. I numeri X ed Y sono scelti "a caso" con rimessa dall'insieme degli interi $\{1, 2, \ldots, N\}$. Denotiamo con p_N la probabilità dell'evento $N\,X \le Y^2$, calcolare $\lim_{N\to\infty} p_N$.

$$\lim_{N\to\infty} p_N = \int_0^1 (1 - \sqrt{x})\, dx = \frac{1}{3}$$

5. Su una linea di comunicazione viene trasmessa una delle tre seguenti sequenze di lettere AAAA, BBBB, CCCC con probabilità rispettive π_1, π_2, π_3 (con somma 1). Ogni lettera è ricevuta correttamente con probabilità p e distorta in ciascuna delle altre due con la stessa probabilità. Supponendo che la trasmissione di ogni lettera è indipendente dalla trasmissione di ogni altra, calcolare la probabilità che sia stata trasmessa la sequenza AAAA, avendo ricevuto la sequenza ABCA.

$$\mathbb{P}(\text{AAAA} \mid \text{ABCA}) =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\text{ABCA} \mid \text{AAAA})\mathbb{P}(\text{AAAA})}{\mathbb{P}(\text{ABCA} \mid \text{AAAA})\mathbb{P}(\text{AAAA}) + \mathbb{P}(\text{ABCA} \mid \text{BBBB})\mathbb{P}(\text{BBBB}) + \mathbb{P}(\text{ABCA} \mid \text{CCCC})\mathbb{P}(\text{CCCC})}$$

$$\mathbb{P}(\text{AAAA}) = \pi_1, \qquad \mathbb{P}(\text{BBBB}) = \pi_2, \qquad \mathbb{P}(\text{CCCC}) = \pi_3$$

$$\mathbb{P}(\text{ABCA} \mid \text{AAAA}) = p\,\frac{1-p}{2}\,\frac{1-p}{2}\,p = \tfrac{1}{4}p^2(1-p)^2$$

$$\mathbb{P}(\text{ABCA} \mid \text{BBBB}) = \frac{1-p}{2}\,p\,\frac{1-p}{2}\,\frac{1-p}{2} = \tfrac{1}{8}p(1-p)^3$$

$$\mathbb{P}(\text{ABCA} \mid \text{CCCC}) = \frac{1-p}{2}\,\frac{1-p}{2}\,p\,\frac{1-p}{2} = \tfrac{1}{8}p(1-p)^3$$

$$\mathbb{P}(\text{AAAA} \mid \text{ABCA}) = \frac{2p\pi_1}{2p\pi_1 + (\pi_2+\pi_3)(1-p)}$$

Povo, 10 giugno 2008