Compito scritto di
Calcolo delle probabilità 1^a *UD*

---

1. Nel lontano Far West due pistoleri, A e B, si sfidano a duello. A centra il bersaglio con una probabilità p_A, mentre B colpisce l'avversario con probabilità p_B. I duellanti concordano di lanciare una moneta (opportunamente sbilanciata) per stabilire chi per primo inizi. Sotto quali condizioni su p_A e p_B è possibile scegliere la moneta in modo che i duellanti abbiano la stessa probabilità di vincere?

Sia p la probabilità lanciando una moneta che inizi A. Allora la probabilità che A vinca è data da

$$\Pr(A \text{ vinca } | A \text{ inizia}) = \frac{p_A}{p_A + p_B - p_A p_B}$$

e

$$\Pr(B \text{ vinca } | A \text{ inizia}) = \frac{(1-p_A)p_B}{p_A + p_B - p_A p_B}$$

e quindi

$$\Pr(A \text{ vinca}) = \frac{p\,p_A + (1-p)\,(1-p_B)\,p_A}{p_A + p_B - p_A p_B}$$

ed analogamente

$$\Pr(B \text{ vinca}) = \frac{p\,(1-p_A)\,p_B + (1-p)\,p_B}{p_A + p_B - p_A p_B}$$

Se vogliamo che abbiano la stessa probabilità dobbiamo porre

$$p\,p_A + (1-p)\,(1-p_B)\,p_A = p\,(1-p_A)\,p_B + (1-p)\,p_B$$

da cui

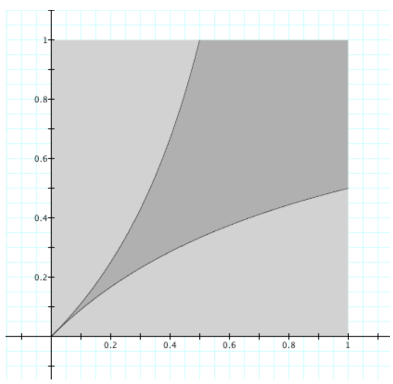
$$p = \frac{p_B - p_A + p_A\,p_B}{2\,p_A p_B}$$

con le ovvie condizioni che $0 \le p \le 1$, cioè

$$p_B - p_A + p_A\,p_B \ge 0, \qquad \frac{p_B - p_A + p_A\,p_B}{2\,p_A p_B} \le 1$$

che si possono scrivere sinteticamente

$$\frac{p_A}{1+p_A} \le p_B \le \frac{p_A}{1-p_A}$$



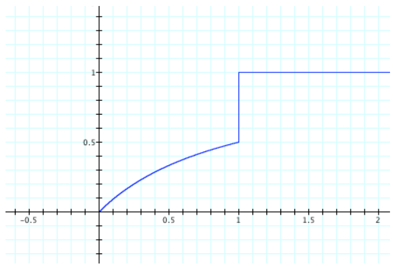
2. Siano le variabili casuali X e Y indipendenti, X con distribuzione geometrica di parametro p e Y con distribuzione esponenziale di parametro λ. Calcolare la probabilità che l'equazione (in t) $t^2 + 2\sqrt{X}\,t + Y = 0$ abbia radici reali.
$\left[\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k \text{ con } k = 0, 1, 2, \dots\right]$

3. Date le variabili casuali X e Y, indipendenti e distribuite esponenzialmente di parametro λ, trovare la distribuzioni di probabilità della variabile casuale

$$U = \frac{X}{\max\{X, Y\}}$$

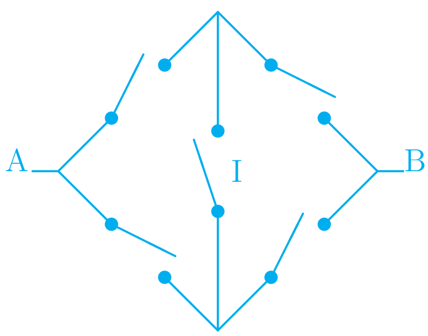
Risulta $\mathbb{P}(U = 1) = \mathbb{P}(X \geq Y) = \frac{1}{2}$ e $\mathbb{P}(0 \leq U \leq 1) = 1$. Inoltre per $0 < t < 1$ abbiamo che $\mathbb{P}(U \leq t) = \mathbb{P}(X \leq tY)$, cioè

$$\mathbb{P}(X \leq tY) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{-\frac{\lambda}{t}x}\, dx = \int_0^\infty e^{-(1+\frac{1}{t})x}\, dx = \frac{t}{1+t}$$



4. In un'urna ci sono r palline bianche ed s palline nere. In n estrazioni, con reimbussolamento, sia E_j l'evento che la pallina estratta alla j-esima estrazione è bianca; sia inoltre F_k l'evento che siano state estratte esattamente k palline bianche. Mostrare che $\mathbb{P}(E_j \mid F_k) = k/n$.

5. Dato il seguente circuito elettrico



in cui ogni interruttore ha probabilità p di essere aperto in modo indipendente dagli altri, calcolare la probabilità che un segnale inviato in A venga ricevuto in B. Sapendo che il segnale è ricevuto in B, calcolare la probabilità che l'interruttore I sia aperto.
Sia F l'evento: il segnale passa da A a B; sia E l'evento: l'interruttore I è aperto. Sia A_1 l'evento: il ramo superiore è chiuso, e sia A_2 l'evento: il ramo inferiore è chiuso: evidentemente si ha

$$E \cap F = E \cap (A_1 \cup A_2)$$

da cui

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E)[\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)] = p(1-p)^2[2-(1-p)^2]$$

Sia B_1 l'evento: almeno uno dei due interruttori a sinistra di I è chiuso; ed analogamente sia B_2 l'evento: almeno uno dei due interruttori a destra di I è chiuso. È chiaro che si ha

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = 2(1-p) - (1-p)^2$$

e d'altro canto abbiamo

$$\bar{E} \cap F = \bar{E} \cap B_1 \cap B_2$$

da cui

$$\mathbb{P}(\bar{E} \cap F) = \mathbb{P}(\bar{E})\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2) = (1-p)^3(1+p)^2$$

e quindi

$$\mathbb{P}(F) = (1-p)^2\big[p(2-(1-p)^2) + (1-p)(1+p)^2\big]$$

ed ancora

$$\mathbb{P}(E \mid F) = \frac{p(1+2p-p^2)}{1+2p+p^2-2p^3}$$

$\boxed{\textit{Povo}, \text{ 22 gennaio 2007}}$