Compito scritto di
Calcolo delle probabilità 1^a *UD*

---

1. Una persona pensa di andare a visitare un amico decidendo aleatoriamente in questo modo: decide se partire lanciando una moneta; in caso positivo sceglie uno dei sei treni possibili lanciando un dado.
L'amico, che conosce questo procedimento, vede che non è arrivato con nessuno dei primi 5 treni. Qual è la probabilità che arrivi con il sesto?
La probabilità condizionata che la persona arrivi con l'ultimo treno sapendo che non è arrivato con i primi 5 si calcola evidentemente come rapporto

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}} = \frac{1}{7}$$

2. Carlo e Mario sostengono un esame che può avere solo tre voti: *insufficiente*, *sufficiente* e *buono*. La probabilità che Carlo ottenga *sufficiente* è di 0.3; la probabilità che Mario ottenga *sufficiente* è di 0.4. La probabilità che nessuno dei due sia *insufficiente* ma che almeno uno sia *sufficiente* sia 0.1. Qual è la probabilità che almeno uno dei due sia *sufficiente* ma che nessuno ottenga *buono*?
Denotiamo con E_c l'evento "Carlo ottiene *sufficiente*" e con E_m l'evento "Mario ottiene *sufficiente*". Denotiamo ancora con A l'evento "nessuno dei due è *insufficiente* ma almeno uno è *sufficiente*" e infine con X l'evento "almeno uno dei due è *sufficiente* ma nessuno ottiene *buono*". I dati sono $\mathbb{P}(E_c) = 0.3$, $\mathbb{P}(E_m) = 0.4$ e $\mathbb{P}(A) = 0.1$. Ebbene, basta osservare che

$$E_c \cup E_m = A \cup X, \qquad \text{e} \qquad E_c \cap E_m = A \cap X$$

da cui usando l'identità $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$ si ottiene

$$\mathbb{P}(E_c) + \mathbb{P}(E_m) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(X)$$

e quindi $\mathbb{P}(X) = 0.3 + 0.4 - 0.1 = 0.6$.

3. Un'urna contiene n palline ottenute da un'estrazione bernoulliana con probabilità p di estrarre una pallina bianca tra palline bianche e nere. Si estraggono senza ripetizione due palline, che risultano bianche. Qual è la probabilità che l'urna inizialmente contenga r palline bianche?
È una diretta applicazione del teorema di Bayes: intanto $2 \le r \le n$. La probabilità di ottenere due palline bianche, sapendo che nell'urna ce ne sono r è data da

$$\frac{r}{n}\cdot\frac{r-1}{n-1}.$$

La probabilità di averne r nell'urna è data da

$$\binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}.$$

La probabilità di estarre due palline bianche è allora data da

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k}{n}\frac{k-1}{n-1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = p^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}(1-p)^{n-2-k+2} = p^2,$$

e quindi concludendo la probabilità richiesta è

$$\frac{r}{n}\cdot\frac{r-1}{n-1}\binom{n}{r}p^{r-2}(1-p)^{n-r} = \binom{n-2}{r-2}p^{r-2}(1-p)^{n-r}$$

4. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variabili casuali indipendenti ed equidistribuite uniformemente in $[0,1]$. Mostrare che per $0 \le x \le 1$ si ha

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \le x) = \frac{x^n}{n!}.$$

Suggerimento: procedere per induzione.
Per $n = 1$ è facilmente verificato. Supponendo la formula vera per n, verifichiamo che vale per $n+1$. Ebbene

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n+1} \le x) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \le x - X_{n+1}) = \\ = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

5. Sia $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ una successione di variabili casuali indipendenti ed equidistribuite uniformemente in $[0,1]$. Sia N la variabile casuale uguale al primo intero k per il quale la somma $X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ è maggiore di 1. Calcolare la distribuzione di probabilità di N ed il valore di aspettazione.
Basta osservare che $\mathbb{P}(N > k) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_k \le 1)$, con $k \ge 2$. Allora

$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(N > k-1) - \mathbb{P}(N > k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{1}{k}\frac{1}{(k-2)!}$$

da cui

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=2}^{\infty} k\mathbb{P}(N = k) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!} = e$$

Povo, 24 luglio 2007