Compito scritto di

Calcolo delle probabilità 1^a *UD*

1. Si rompa "a caso" una barretta in due pezzi. Sia R il rapporto tra la lunghezza del pezzo più corto ed il pezzo più lungo. Calcolare la densità di probabilità di R, la media e la varianza.

Sia X la lunghezza del primo pezzo (uniformemente distribuita in $[0,1]$ — il tutto è indipendente dalla lunghezza della barretta). Il rapporto R varia tra zero ed 1 e si vede facilmente che $\frac{X}{1-X} \le t$ implica che $X \le 1/2$ e anche che $\frac{1-X}{X} \le t$ implica che $X \ge 1/2$. Quindi

$$\mathbb{P}(R \le t) = \mathbb{P}\Big(\frac{X}{1-X} \le t\Big) + \mathbb{P}\Big(\frac{1-X}{X} \le t\Big) = \mathbb{P}\Big(X \le \frac{t}{1+t}\Big) + \mathbb{P}\Big(X \ge \frac{1}{1+t}\Big) = \frac{2t}{1+t}.$$

Da cui

$$f(t) = F'(t) = \frac{2}{(1+t)^2}$$

e quindi

$$\mathbb{E}(R) = m = \int_0^1 t f(t) dt = 2\log 2 - 1 \approx 0.38629,$$

$$\mathsf{Var}(R) = \int_0^1 (t-m)^2 f(t) dt = 2 - 4(\log 2)^2 \approx 0.07818$$

2. Un'urna contiene 10 dadi di cui uno truccato in modo da dare 1 con probabilità $\frac{1}{2}$ ed ognuno degli altri cinque risultati con probabilità $\frac{1}{10}$. Dall'urna viene estratto un dado che è poi lanciato tre volte

a) qual è la probabilità che i risultati siano due volte 1 e una volta 5?

b) Qual è la probabilità che il dado sia truccato sapendo che i tre lanci hanno dato due volte 1 e una volta 5? Sapendo che i tre lanci hanno dato due volte 1 e una volta 5, è più probabile che si tratti di un dado truccato oppure di uno equilibrato?

Denotiamo con F l'evento "estraggo il dado truccato" e abbiamo che $\mathbb{P}(F) = \frac{1}{10}$. Denotiamo con E l'evento "in tre lanci i risultati siano due volte 1 e una volta 5". Ebbene $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \mid F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E \mid F^c)\mathbb{P}(F^c)$. Ora

$$\mathbb{P}(E \mid F) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{10}, \qquad \mathbb{P}(E \mid F^c) = 3\left(\frac{1}{6}\right)^3$$

da cui

$$\mathbb{P}(E) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{10}\frac{1}{10} + 3\left(\frac{1}{6}\right)^3 \frac{9}{10} = \frac{1}{50}$$

D'altra parte

$$\mathbb{P}(F \mid E) = \frac{\mathbb{P}(E \mid F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{3}{8}$$

e quindi

$$\mathbb{P}(F^c \mid E) = \frac{5}{8}$$

da cui è più probabile che sia stato estratto un dado "normale".

3. Siano X_1 e X_2 due variabili casuali indipendenti e con distribuzione normale di media 0 e varianza 1. Sono le due variabili casuali $Y_1 = X_1 + X_2$ e $Y_2 = X_1 - X_2$ indipendenti? Qual è la loro distribuzione di probabilità congiunta e quelle marginali?

La somma di variabili casuali gaussiane ed indipendenti è ancora gaussiana con media la somma delle media e varianza la somma delle varianze: quindi $Y_1 \approx N(0,2)$ ed $Y_2 \approx N(0,2)$. Inoltre la coppia (X_1, X_2) è gaussiana bidimensionale, da cui anche la coppia (Y_1, Y_2) è una gaussiana bidimensionale: siccome $E(Y_1Y_2) = 0$ (sono non correlate) allora sono anche indipendenti.

4. In una stanza ci sono quattro persone. Qual è la probabilità che almeno due di loro siano nate di lunedì? Qual è la probabilità che almeno due di loro siano nate nello stesso giorno della settimana?

Pr(almeno due di loro siano nate di lunedì)$=$ 1-Pr(al più una di loro sia nata di lunedì) quindi

$$\mathrm{Pr}(\text{almeno due di loro siano nate di lunedì}) = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^4 - 4\,\frac{1}{7}\left(\frac{6}{7}\right)^3 = \frac{241}{2401} \approx 0.1$$

Pr(almeno due di loro siano nate nello stesso giorno della settimana)$=$ 1-Pr(sono nate in quattro giorni distinti della settimana); ora

$$\mathrm{Pr}(\text{sono nate in quattro giorni distinti della settimana}) = \frac{6}{7}\frac{5}{7}\frac{4}{7}$$

quindi

$$\mathrm{Pr}(\text{almeno due di loro siano nate nello stesso giorno della settimana}) = 1 - \frac{6}{7}\frac{5}{7}\frac{4}{7} = \frac{223}{343} \approx 0.65$$

5. Sia X una variabile casuale a valori interi (non negativi); mostrare che

a) $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$.

b) Un'urna contenga b palline blu e r palline rosse. Si estraggano successivamente le palline finché non appaia una pallina blu. Mostrare che il numero medio di palline estratte è dato da $\frac{b+r+1}{b+1}$.

Potrebbe essere utile considerare l'identità $\sum_{j=0}^{n} \binom{m+j}{m} = \binom{n+m+1}{m+1}$

Per la parte a) risulta

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sum_{j=1}^{k} 1 = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} p_k = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq j) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

Per la parte b), denotiamo con N il numero aleatorio di estrazioni e per usare la formula di a) calcoliamo

$$\mathbb{P}(N > k) = \frac{r}{b+r}\,\frac{r-1}{b+r-1}\,\frac{r-2}{b+r-2}\cdots\frac{r-k+1}{b+r-k+1} = \frac{r!(b+r-k)!}{(r-k)!(b+r)!} = \frac{\binom{b+r-k}{b}}{\binom{b+r}{b}}$$

e quindi

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=0}^{r}\mathbb{P}(N > k) = \frac{\sum_{k=0}^{r}\binom{b+r-k}{b}}{\binom{b+r}{b}} = \frac{\sum_{k=0}^{r}\binom{b+k}{b}}{\binom{b+r}{b}} = \frac{\binom{b+r+1}{b+1}}{\binom{b+r}{b}} = \frac{b+r+1}{b+1}$$

Povo, 26 agosto 2011