Compito scritto di
Calcolo delle probabilità 1^a UD

---

1. Un fumatore porta sempre con sé due scatolette, ciascuna inizialmente con n fiammiferi. Ogni volta che vuole fumare una sigaretta sceglie *a caso* una delle due scatolette, da cui prende il fiammifero. Calcolare la probabilità che, trovando per la prima volta la scatoletta scelta vuota, l'altra scatoletta contenga r fiammiferi.
Il numero X di fiammiferi rimasti nell'altra scatoletta è una variabile casuale, che può avere tutti i valori interi r da 0 ad n. Affinché ciò accada, deve risultare che il numero di estrazioni sia $n + (n - r) + 1$, dove l'ultima estrazione è quella quando il fumatore si accorge della scatola vuota. Quindi

$$\mathbb{P}(r \text{ fiammiferi}) = 2\binom{2n-r}{n}\frac{1}{2^n}\frac{1}{2^{n-r}}\frac{1}{2} = \binom{2n-r}{n}\frac{1}{2^{2n-r}}$$

2. Sia S una semicirconferenza di raggio R, costruita sul diametro D.
1. Scegliendo *a caso* un punto P su S, sia X la lunghezza del segmento PP', dove P' è la proiezione (ortogonale) di P sul diametro D. Calcolare il valore di aspettazione di X.
2. Scegliendo *a caso* un punto P' sul diametro D, sia X' la lunghezza del segmento PP', dove P è il punto su S la cui proiezione (ortogonale) sul diametro D è P'. Calcolare il valore di aspettazione di X'.
Nel primo caso, $X = R\sin(\Theta)$, dove Θ è una variabile casuale uniformemente distribuita in $[0, \pi]$. Quindi

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\pi R\,\sin(\theta)\,\frac{d\theta}{\pi} = \frac{2R}{\pi}$$

Nel secondo caso, $X' = \sqrt{R^2 - \Xi^2}$, dove Ξ è una variabile casuale uniformemente distribuita

in $[-R, R]$. Quindi

$$\mathbb{E}(X') = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - \xi^2}\,\frac{d\xi}{2R} = \frac{\pi R^2}{2}\frac{1}{2R} = \frac{\pi R}{4}$$

3. Un'urna contiene n palline numerate da 1 ad n. Scegliendo k palline *a caso* (senza rimpiazzo), sia N la somma dei numeri sulle palline scelte. Calcolare il valore di aspettazione di N *e, avendo tempo e pazienza, la sua varianza*
Sia X_1 il risultato della prima estrazione. Risulta evidentemente $\mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{1}{n}$ per ogni $k = 1, \ldots, n$. Quindi

$$\mathbb{E}(X_1) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$$

Sia X_2 il risultato della seconda estrazione. Evidentemente essa è distribuita come X_1. Lo stesso vale per $X_3, X_4, \ldots, X_k$. Quindi

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(X_i) = \frac{k(n+1)}{2}$$

Per il calcolo della varianza si può usare la formula $\mathbf{Var}(N) = \mathbb{E}(N^2) - \mathbb{E}(N)^2$. Quindi

$$\mathbb{E}(N^2) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(X_i^2) + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}(X_i X_j)$$

Evidentemente i prodotti $X_i X_j$ sono equidistribuiti, da cui

$$\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(X_1 X_2) = \sum_{m_1 \neq m_2} m_1 \, m_2 \, \frac{1}{n(n-1)} = \frac{(\sum_{m=1}^{n} m)^2 - \sum_{m=1}^{n} m^2}{n(n-1)}$$

D'altra parte $\mathbb{E}(X_i^2) = \sum_{m=1}^{n} m^2 \frac{1}{n}$. Concludendo

$$\mathbf{Var}(N) = \frac{k}{n} \sum_{m=1}^{n} m^2 + (k^2 - k) \frac{(\sum_{m=1}^{n} m)^2 - \sum_{m=1}^{n} m^2}{n(n-1)} - \frac{k^2(n+1)^2}{4} = \frac{k(n-k)(n+1)}{12}$$

dove si è usata la formula $\sum_{m=1}^{n} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. Il numero (aleatorio) di periodi di secca di una falda acquifera in un anno segue una distribuzione di Poisson di parametro λ. L'abbassamento percentuale della falda in ogni periodo di secca ha, indipendentemente dagli altri, distribuzione uniforme in $[0, 1]$. Calcolare la probabilità che in un anno vi sia almeno un periodo di siccità "disastroso" tale da prosciugare la falda, ossia di ampiezza superiore al 90%. Conviene calcolare dapprima la probabilit di non avere alcuna secca "disastrosa". Siccome la probabilità che una secca sia disastrosa è 0.1, allora la probabilità cercata è

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (0.9)^k = e^{-\lambda} e^{0.9\lambda} = e^{-0.1\lambda}$$

da cui la probabilità richiesta: $1 - e^{-0.1\,\lambda}$.

5. Mostrare che dati n eventi A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_n$, vale la formula

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{k_1, k_2} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap A_{k_2}) + \sum_{k_1, k_2, k_3} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}) - \cdots + (-1)^n \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

dove le varie somme sono estese a tutte le combinazioni di indici (per es., con due indici la somma si intende per tutte le combinazioni di classe 2).

Suggerimento: per induzione.

Per $n = 2$ la formula si riduce a quella ben nota

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$$

Per $n > 2$ possiamo scrivere

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) \cup A_n\Big)$$

ed utilizzare la formula per $n = 2$ e l'ipotesi induttiva. Si ha

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\Big)$$

Da

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{k_1,k_2} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap A_{k_2}) + \sum_{k_1,k_2,k_3} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}) - \cdots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

e da

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} \big(A_i \cap A_n\big)\Big) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k \cap A_n) - \sum_{k_1,k_2} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_n) + \sum_{k_1,k_2,k_3} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3} \cap A_n) - \cdots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

si ottiene la formula per n.

Povo, 28 giugno 2007