Compito scritto di
Calcolo delle probabilità 1^a *UD*

1. Si pongano *a caso* n palline in N urne e si denoti con A_j l'evento che la j-esima urna rimanga vuota. Qual è la probabilità che m urne (fissate) rimangano vuote, cioè la probabilità $\mathbb{P}(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_m})$?
È come mettere le palline in due urne: una con probabilità $\frac{m}{N}$ e l'altra con probabilità $1 - \frac{m}{N}$. Quindi la probabilità richiesta è $\mathbb{P}(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_m}) = (1 - \frac{m}{N})^n$

2. Continuando l'esercizio precedente, qual è la probabilità che almeno un'urna rimanga vuota? Ed infine qual è la probabilità che rimangano esattamente k urne vuote (ma non fissate)?
Bisogna calcolare $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N) = \sum_j \mathbb{P}(A_j) - \sum_{j_1,j_2} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap A_{j_2}) + \sum_{j_1,j_2,j_3} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap A_{j_3}) + \ldots$, quindi $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N) = -\sum_{j=1}^{N} (-1)^j \binom{N}{j} (1 - \frac{j}{N})^n$. Per la seconda risposta, osserviamo che la probabilità cercata è data da

$$\binom{N}{k} \Big(1 - \frac{k}{N}\Big)^n \cdot \sum_{j=0}^{N-k} (-1)^j \binom{N-k}{j} \Big(1 - \frac{j}{N-k}\Big)^n$$

3. Supponiamo che una canoa superi una rapida senza danni con probabilità p_1; che si rompa completamente con probabilità p_2 e che subisca seri danni con probabilità p_3 ($p_1+p_2+p_3 = 1$). Se in una serie di rapide la canoa subisce due volte seri danni allora viene considerata perdente. Qual è la probabilità che in n rapide la canoa non sia perdente?
La probabilità è data da $p_1^n + np_1^{n-1} p_3$

4. Siano X, Y due variabili casuali che abbiano densità di probabilità congiunta $f(x, y) = C\,(x + y)e^{-x\,y}$ per $x, y \geq 0$ e nulla negli altri punti. Determinare la costante C e trovare la densità di probabilità della variabile casuale $Z = X + Y$.
Deve risultare $\displaystyle\int_{x \geq 0, y \geq 0} f(x, y)\, dxdy = 1$, da cui $C = \frac{1}{2}$.
Quindi $\mathbb{P}(X + Y \leq t) = \displaystyle\int_0^t dx \int_0^{t-x} f(x, y)\, dy$; la cui derivata rispetto a t, che è la densità cercata, è data da $\displaystyle\int_0^t f(x, t - x)\, dx = \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$

5. Siano X, Y e Z tre variabili casuali indipendenti. X e Y siano gaussiane di media 0 e varianza 1; Z sia una variabile discreta i cui valori siano $z_1, z_2, z_3, \ldots$ con probabilità $\mathbb{P}(Z = z_k) = p_k$. Trovare la distribuzione di probabilità della variabile casuale

$$W = \frac{X + YZ}{\sqrt{1 + Z^2}}$$

Risulta

$$\mathbb{P}(W \leq w) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \, \mathbb{P}\Big(\tfrac{1}{\sqrt{1+z_k^2}} X + \tfrac{z_k}{\sqrt{1+z_k^2}} Y \leq w\Big)$$

Ma ogni $\frac{1}{\sqrt{1+z_k^2}} X + \frac{z_k}{\sqrt{1+z_k^2}} Y$ è una normale $N(0,1)$! Quindi anche W è $(N(0,1)$.

Povo, 29 ottobre 2010