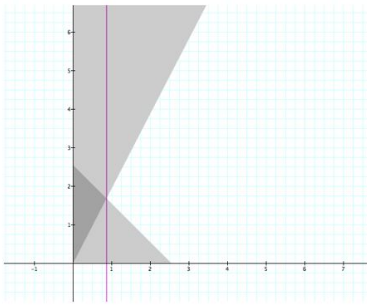
Compito scritto di
Calcolo delle probabilità 1^a *UD*

---

1. Date due variabili casuali X e Y indipendenti ed equidistribuite in modo esponenziale di parametro λ, trovare la distribuzione congiunta e le distribuzioni marginali delle variabili casuali $U = X + Y$ e $V = \frac{X}{X+Y}$. Sono U e V indipendenti?

U è una variabile casuale a valori in $[0, \infty[$, mentre V è a valori in $[0, 1]$ ($\frac{X}{X+Y} \leq 1$). Quindi, con $t \in [0, \infty[$ e $s \in [0, 1]$, valutiamo la distribuzione congiunta

$$\mathbb{P}(U \leq t, V \leq s) = \mathbb{P}(X + Y \leq t, \tfrac{X}{X+Y} \leq s) = \mathbb{P}(X + Y \leq t, (1 - s)X \leq sY)$$



dove la retta passa per $x = t\,s$. Quindi

$$\mathbb{P}(U \leq t, V \leq s) = \int_0^{ts} \lambda e^{-\lambda x} \int_{\frac{1-s}{s}x}^{t-x} \lambda e^{-\lambda y} dy \;\; dx = \int_0^{ts} \lambda e^{-\lambda x}(e^{-\lambda \frac{1-s}{s} x} - e^{-\lambda(t-x)})dx$$

Continuando con il calcolo

$$\mathbb{P}(U \leq t, V \leq s) = \int_0^{ts} \lambda(e^{-\lambda \frac{1}{s} x} - e^{-\lambda t})dx = s(1 - e^{-\lambda t} - t\, e^{-\lambda t})$$

Con $t = \infty$ otteniamo la marginale di V: $\mathbb{P}(V \leq s) = s$.
Con $s = 1$ otteniamo la marginale di U: $\mathbb{P}(U \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} - t\, e^{-\lambda t}$.
Quindi U e V sono indipendenti.

2. Da un'urna contenente palline bianche e nere si estraggono senza reimbussolamento alcune palline. Supponiamo che la probabilità di ottenere esattamente una pallina bianca se si estrae una sola pallina sia uguale alla probabilità se si estraggono due palline ed al doppio della probabilità se si estraggono tre palline. Quante palline bianche e quante nere ci sono nell'urna?

Sia b il numero (incognito) di palline bianche e n il numero di palline nere. Estraendo una pallina la probabilità che sia bianca è $\frac{b}{b+n}$. Estraendone due, la probabilità che ve ne sia esattamente una bianca è $\frac{2bn}{(b+n)(b+n-1)}$. Estraendone tre, la probabilità che ve ne sia esattamente una bianca è $\frac{3bn(n-1)}{(b+n)(b+n-1)(b+n-2)}$. Quindi abbiamo le equazioni

$$\frac{b}{b+n} = \frac{2bn}{(b+n)(b+n-1)}, \qquad \frac{2bn}{(b+n)(b+n-1)} = 2\frac{3bn(n-1)}{(b+n)(b+n-1)(b+n-2)}$$

da cui semplificando

$$b + n - 1 = 2n, \qquad b + n - 2 = 3(n - 1)$$

da cui $b = 3$ e $n = 2$.

3. Due aeroplani, un quadrimotore e un bimotore, hanno motori dello stesso tipo, che in una tratta possono avere un'avaria, indipendentemente, con probabilità p. Ciascuno dei due aeroplani può continuare il volo se funziona almeno la metà dei suoi motori. Per quali valori di p è più affidabile il quadrimotore?

La probabilità che il bimotore possa proseguire il suo volo è data da $(1-p)^2 + 2p(1-p)$, dove $(1-p)^2$ è la probabilità di non avere alcuna avaria, mentre $2p(1-p)$ è la probabilità di avere un solo motore in avaria.
Analogamente, la probabilità che il quadrimotore possa proseguire il suo volo è data da $(1-p)^4 + 4p(1-p)^3 + 6p^2(1-p)^2$, dove $(1-p)^4$ è la probabilità di non avere alcuna avaria, $4p(1-p)^3$ è la probabilità di avere un solo motore in avaria (il motore in avaria può essere uno qualsiasi dei 4), mentre $6p^2(1-p)^2$ è la probabilità di avere due motori in avaria (e ho 6 possibilità). Quindi abbiamo la disequazione

$$(1-p)^4 + 4p(1-p)^3 + 6p^2(1-p)^2 > (1-p)^2 + 2p(1-p).$$

Semplificando otteniamo

$$p^2(1-3p) > 0,$$

quindi $p < \frac{1}{3}$.

4. Sia $S_n, n \geq 0$ la passeggiata casuale simmetrica con $S_0 = 0$ e sia $T = \min\{n > 0 : S_n = 0\}$. Mostrare che

$$\mathbb{E}\big(\min\{T, 2m\}\big) = 4m\,\mathbb{P}(S_{2m} = 0)$$

Suggerimento. Mostrare che: i) $2m\,u_{2m} = (2m-1)\,u_{2m-2}$ e ii) $u_0 + u_2 + \cdots + u_{2m-2} = 2m\,u_{2m}$ dove $u_{2m} = \mathbb{P}(S_{2m} = 0)$.

La i) è una semplice verifica a partire dalla formula $u_{2m} = \binom{2m}{m}2^{-2m}$. La ii) si dimostra per induzione: $u_0 = 1$, $u_0 + u_2 = 3u_2 = 4u_4$ usando due volte la i); supponendola vera fino a $2m-4$ si ottiene la tesi usando ancora la i).
Infine risulta che $\mathbb{P}(\min\{T, 2m\} = 2k) = f_{2k}$ per $k < m$ e $\mathbb{P}(\min\{T, 2m\} = 2m) = 1 - f_2 - f_4 - \cdots - f_{2m-2}$. Ricordiamo che $f_2 + f_4 + \cdots + f_{2m-2} = 1 - u_{2m-2}$, quindi

$$\mathbb{E}\big(\min\{T, 2m\}\big) = \sum_{k=1}^{m-1} 2kf_{2k} + 2mu_{2m-2}.$$

Ricordando che $f_{2k} = u_{2k-2} - u_{2k}$ abbiamo

$$\mathbb{E}\big(\min\{T, 2m\}\big) = 2(u_0 + u_2 + \cdots + u_{2m-2}),$$

ottenendo il risultato usando la ii).

5. Sia X una variabile casuale con distribuzione binomiale di parametri n e p, calcolare

$$\mathbb{E}\Big(\frac{1}{1+X}\Big).$$

Supponendo che p dipenda da n, cioè $p = p_n$, calcolare il limite di questa espressione per $n \to \infty$ sapendo che $n\,p_n \to \lambda$, con $\lambda > 0$.

Abbiamo che

$$\mathbb{E}\Big(\frac{1}{1+X}\Big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Possiamo scrivere

$$\frac{1}{1+k}\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{1+n}\binom{n+1}{k+1}$$

quindi

$$\mathbb{E}\Big(\frac{1}{1+X}\Big) = \frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{1+n}\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k}.$$

da cui

$$\mathbb{E}\Big(\frac{1}{1+X}\Big) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

per passare al limite, basta osservare che $p_n \to 0$ *e quindi* $(n+1)p_n \to \lambda$*; d'altra parte*

$$(1-p_n)^{n+1} = (1-p_n)(1-\frac{np_n}{n})^n \to e^{-\lambda};$$

possiamo concludere che

$$\mathbb{E}\Big(\frac{1}{1+X}\Big) \to \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Povo, 11 luglio 2005