L'insieme delle parti di $\{1,2,3,\dots,N\}$ consiste di 2^N elementi. Se si estraggono (con ripetizione) r sottoinsiemi $E_1, E_2, \dots, E_r$, i casi possibili sono $(2^N)^r = 2^{rN}$. Resta da contare i casi favorevoli, cioè i casi per cui gli E_i sono a due a due disgiunti: per questo denotiamo con k_1 il numero di elementi di E_1, con k_2 il numero degli elementi di E_2 e così via fino a k_r per E_r. Denotiamo infine con k_0 il numero di elementi che non sono in nessun E_i. È evidente che deve risultare

$$k_0 + k_1 + k_2 + \dots + k_r = N .$$

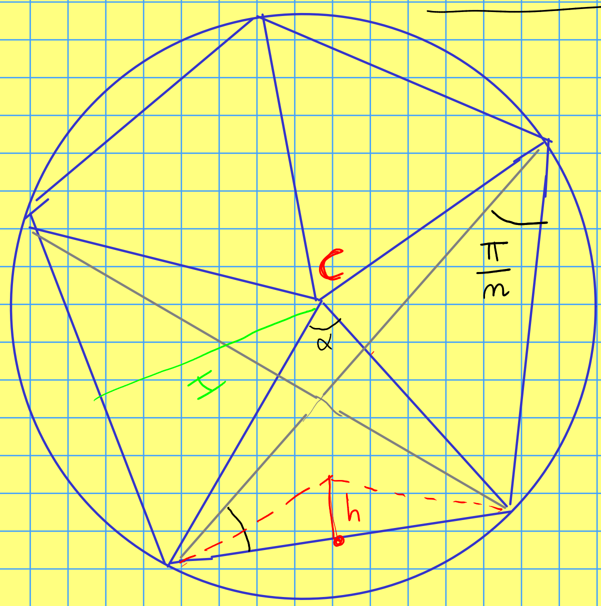
Per contare i casi favorevoli si può osservare che fissati $k_0, k_1, \dots, k_r$ i casi corrispondenti si possono contare permutando tutti gli N ed escludendo le permutazioni tra quelli di $k_0, k_1, \dots, k_r$: cioè

$$\frac{N!}{k_0!\,k_1!\cdots k_r!}$$

Per contarli tutti è necessario sommare per ogni scelta di $k_0, k_1, \dots, k_r$ tale che $k_0 + k_1 + \dots + k_r = N$; in formule

$$\sum_{k_0+k_1+\dots+k_r=N} \frac{N!}{k_0!\,k_1!\dots k_r!} = (r+1)^N$$

Quindi la risposta è $P_r = \left(\frac{r+1}{2^r}\right)^N$.



$$\alpha = \frac{2\pi}{n}$$

$$h = \frac{\ell}{2} \tan \frac{\pi}{2n}$$

$$A = \frac{\ell^2}{4} \tan \frac{\pi}{2n}$$

$$H \tan \frac{\pi}{n} = \frac{\ell}{2} \qquad A_T = \frac{\ell^2}{4} \frac{1}{\tan \frac{\pi}{n}}$$

$$P_n = \text{prob. cercata} = \frac{A}{A_T} = \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Infine con lo sviluppo $\tan x = x(1+o(1))$ (per $x \to 0$) otteniamo

$$A_T(n) = \frac{\pi^2}{2} n^{-2} (1+o(1)).$$

Si osservi che $z_2 = q^2$ e $z_3 = pq^2$. Per $n \geq 4$ osserviamo che se il primo lancio è T allora rimangono $n-1$ lanci con prob. z_{n-1}; se invece esce C deve uscire al secondo lancio T e rimangono $n-2$ lanci con prob. z_{n-2}. Quindi

$$(1) \qquad z_n = p\, z_{n-1} + qp\, z_{n-2} \qquad n \geq 4$$

Per calcolare la media $m = \sum_{n=2}^{\infty} n z_n$, moltiplichiamo la (1) per n e sommiamo per $n \geq 4$:

$$\sum_{n=4}^{\infty} n z_n = p \sum_{n=4}^{\infty} n z_{n-1} + qp \sum_{n=4}^{\infty} n z_{n-2}$$

Ora
$$\sum_{n=4}^{\infty} n z_n = m - 2z_2 - 3z_3$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} n z_{n-1} = \sum_{n=4}^{\infty} (n-1) z_{n-1} + \sum_{n=4}^{\infty} z_{n-1} = \sum_{n=3}^{\infty} n z_n + \sum_{n=3}^{\infty} z_n$$
$$= m - 2z_2 + 1 - z_2$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} n z_{n-2} = \sum_{n=4}^{\infty} (n-2) z_{n-2} + 2\sum_{n=4}^{\infty} z_{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n z_n + 2\sum_{n=2}^{\infty} z_n =$$
$$= m + 2$$

Quindi
$$m - 2z_2 - 3z_3 = p\left(m - 3z_2 + 1\right) + qp\,(m+2)$$

cioè
$$(1 - p - qp)\,m = 2z_2 + 3z_3 - p\,3z_2 + p + 2qp$$

Ora
$$1 - p - qp = q^2 \qquad \text{e}$$

$$2z_2 + 3z_3 - 3pz_2 + p + 2qp = 2q^2 + \cancel{3pq^2} - \cancel{3pq^2} + p + 2qp =$$
$$= 2q(q+p) + p = 2q + p = 1 + q$$

ed infine

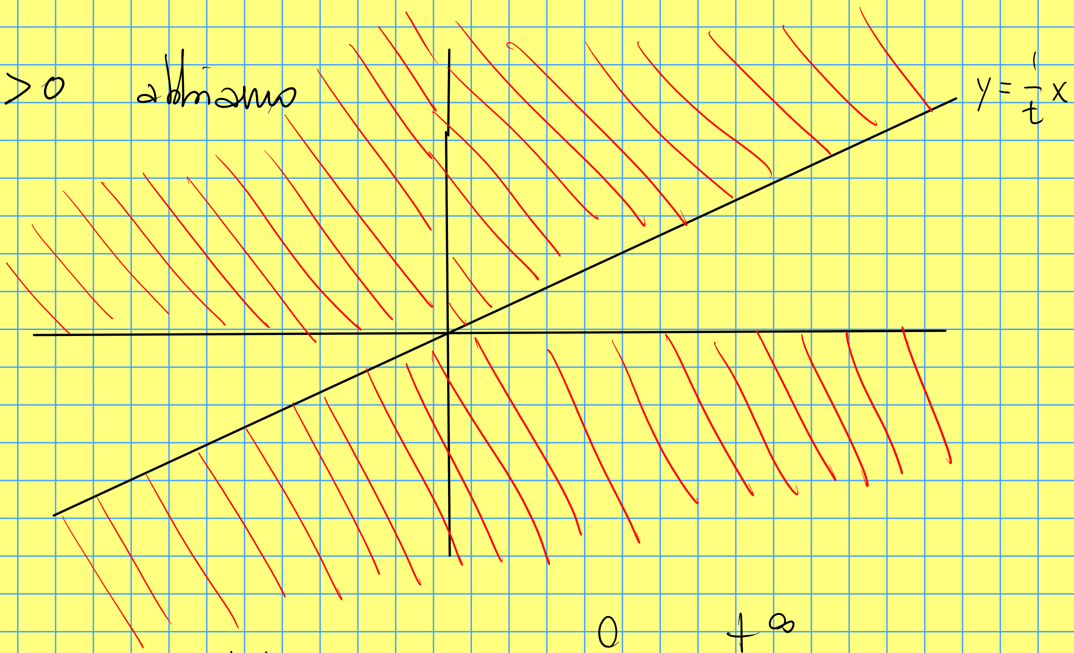
$$m = \frac{1+9}{9^2}.$$

$$F(t) = \mathbb{P}(U \le t) = \mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} \le t\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} \le t,\ Y \ge 0\right) + \mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} \le t,\ Y < 0\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(X \le tY,\ Y \ge 0\right) + \mathbb{P}\left(X \ge tY,\ Y < 0\right)$$

Per $t > 0$ abbiamo

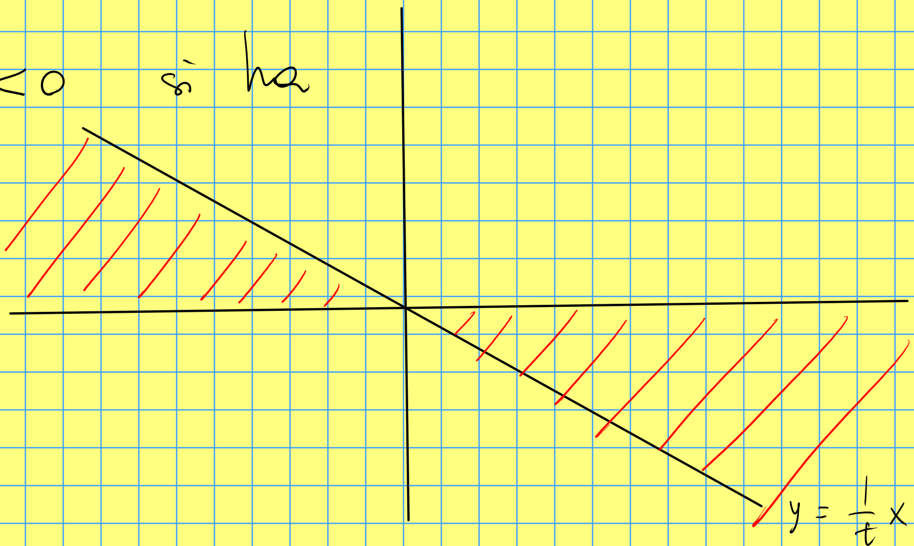


$$F(t) = \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{ty} f(x,y)\,dx + \int_{-\infty}^{0} dy \int_{ty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

$$F'(t) = \int_0^{\infty} y\, f(ty,y)\, dy - \int_{-\infty}^{0} y\, f(ty,y)\, dy$$

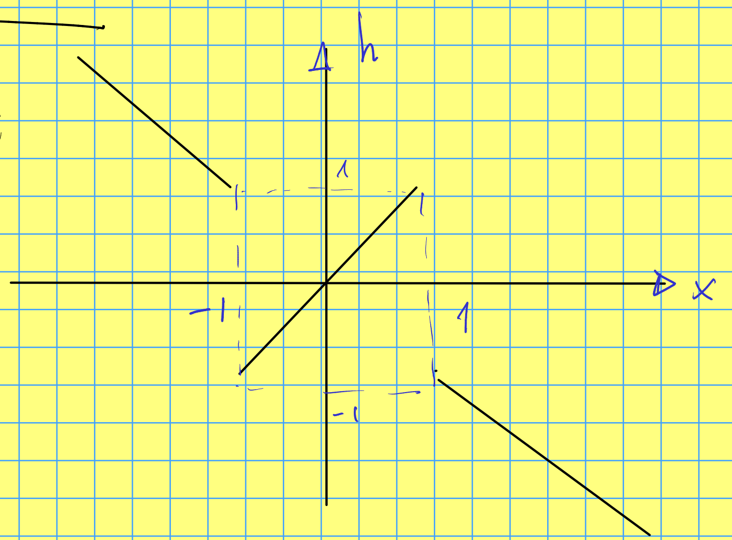
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |y|\, f(ty,y)\, dy \longleftarrow$$ densità di probabilità di U

Per $t<0$ si ha

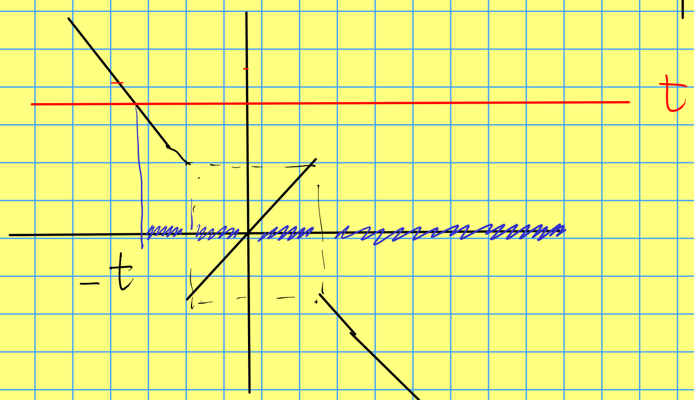


ma $F(t)$ è lo stesso di prima!

$Y = h(X)$ dove h è

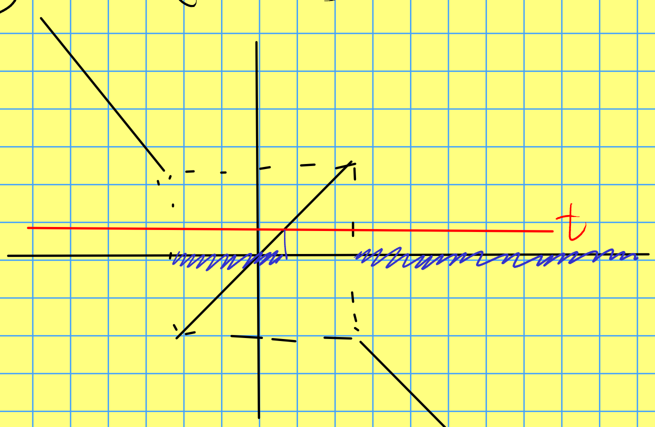


Se $t > 1$



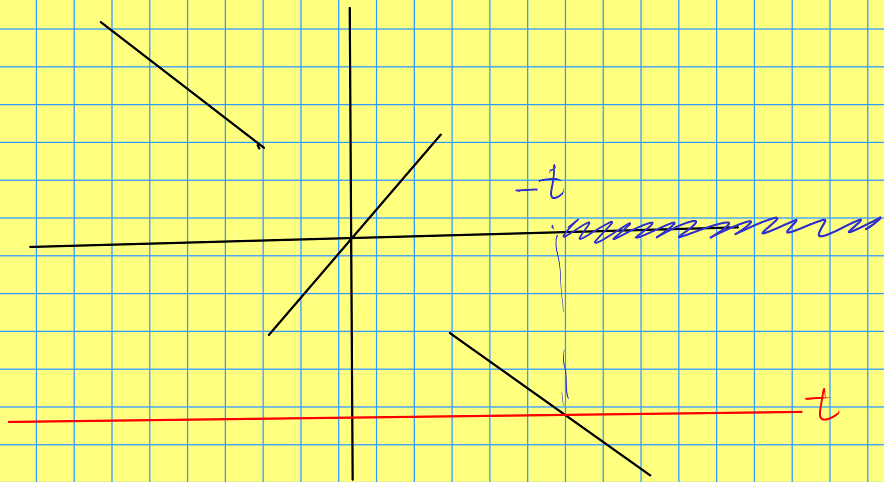
$P(Y \le t) = P(X \ge -t) = P(X \le t)$ ✱

Se $-1 \le t \le 1$



$$P(Y \leq t) = P(-1 \leq X \leq t) + P(X > 1)$$
$$= P(-1 \leq X \leq t) + P(X < -1)$$
$$= P(X \leq t) \quad *$$

Per $t < -1$



$$P(Y \leq t) = P(X \geq -t) = P(X \leq t) \quad *$$

Quindi Y è gaussiana. Infine $Z = X + Y$

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{per } |X| > 1 \\ 2X & \text{per } |X| \leq 1 \end{cases}$$

In altre parole Z prende valori solo tra -1 e 1 e quindi NON può essere una gaussiana.