Compito scritto di
Calcolo delle probabilità 1^a *UD*

1. In una comunità di $N+1$ persone ($N>1$), un falsario, appartenente alla comunità, dà una banconota, da lui fabbricata, ad una seconda persona che la passa ad una terza e così via. Ad ogni passo l'individuo, a cui viene passata la banconota, è scelto a caso tra le persone della comunità. Sapendo che la banconota passa di mano in mano k ($k>0$) volte, calcolare la probabilità:
a) che la banconota non torni mai al suo fabbricatore;
b) che la banconota non venga mai data due volte ad una stessa persona.

Ogni persona può passare la banconota ad altre N persone. In un passaggio la probabilità che la banconota non vada al falsario è $\frac{N-1}{N}$. Quindi la risposta al quesito a) è $\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}$
Analogamente per la b) abbiamo

$$\frac{N-1}{N}\frac{N-2}{N}\frac{N-3}{N}\cdots\frac{N-k+1}{N}$$

2. Si supponga che n palline siano distribuite a caso (e secondo la distribuzione uniforme) tra m caselle.
a) Sia X il numero di caselle che risultano vuote. Calcolare $\mathbb{E}(X)$. (Si consiglia di introdurre opportune variabili casuali indicatrici).
b) Sia Y il numero di caselle contenenti una sola pallina. Calcolare $\mathbb{E}(Y)$.
Introduciamo per ogni casella k la variabile casuale indicatrice $X_k=1$ se la k-esima casella è vuota e $X_k=0$ altrimenti. La probabilità che $\mathbb{P}(X_k=1)=(1-\frac{1}{m})^n \equiv \mathbb{E}(X_k)$, da cui $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(X_1+X_2+\cdots+X_m)=m(1-\frac{1}{m})^n$. In modo analogo introduciamo per ogni casella k la variabile casuale indicatrice $Y_k=1$ se la k-esima casella contiene una pallina e $Y_k=0$ altrimenti. La probabilità che $\mathbb{P}(Y_k=1)=n\frac{1}{m}(1-\frac{1}{m})^{n-1}\equiv\mathbb{E}(Y_k)$, da cui $\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(Y_1+Y_2+\cdots+Y_m)=n(1-\frac{1}{m})^{n-1}$.

3. Siano $X_1,X_2,\ldots,X_n$ variabili casuali indipendenti con la stessa legge esponenziale di parametro 1. Risulta che $\mathbb{P}(\text{che esista una coppia } (i,j): X_i=X_j)=0$ (esercizio facoltativo: *provare a dimostrarlo*); definiamo

$$Z=\min_{1\le i\le n} X_i \quad \text{e} \quad N=\min\{1\le i\le n: X_i=Z\}.$$

a) Determinare le legge di Z. b)Stabilire che

$$\mathbb{P}(N=k,Z>t)=e^{-nt}/n, \quad k=1,2,\ldots,n, \quad t>0$$

e dedurre che Z e N sono variabili casuali indipendenti precisando la distribuzione di N.
Come è stato detto più volte a lezione

$$\mathbb{P}(Z>t)=\mathbb{P}(X_1>t,X_2>t,\ldots,X_n>t)=\mathbb{P}(X_1>t)^n=e^{-nt}$$

e quindi la a) è ovvia. Per la b) è sufficiente osservare che

$$\mathbb{P}(N = k, Z > t) = \mathbb{P}(X_k > t, X_i > X_k \text{ per ogni } i \neq k) = c$$

dove c non dipende da k. Quindi

$$e^{-nt} = \mathbb{P}(Z > t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N = k, Z > t) = n\,c$$

. Abbiamo stabilito quindi che $\mathbb{P}(N = k, Z > t) = e^{-nt}/n$, da cui per $t = 0$ abbiamo la marginale $\mathbb{P}(N = k) = \frac{1}{n}$, da cui l'indipendenza.

4. Un'urna contiene n palline bianche e m palline nere; una seconda urna contiene N palline bianche e M palline nere. Una pallina viene trasferita in modo casuale dalla prima alla seconda urna, e poi dalla seconda alla prima urna. Se una pallina è ora selezionata in modo casuale dalla prima urna, dimostrate che la probabilità che sia bianca è

$$\frac{n}{n+m} + \frac{mN - nM}{(n+m)^2(N+M+1)}.$$

Le configurazioni possibili finali della prima urna sono tre:

$$\{n, m\}, \quad \{n-1, m+1\}, \quad \{n+1, m-1\}$$

$$\mathbb{P}(\{n,m\} \longrightarrow \{n,m\}) = \frac{n}{n+m}\,\frac{N+1}{N+M+1} + \frac{m}{n+m}\,\frac{N+1}{N+M+1}$$

$$\mathbb{P}(\{n,m\} \longrightarrow \{n-1,m+1\}) = \frac{n}{n+m}\,\frac{M}{N+M+1}$$

$$\mathbb{P}(\{n,m\} \longrightarrow \{n+1,m-1\}) = \frac{m}{n+m}\,\frac{N}{N+M+1}$$

quindi la risposta è

$$\Big[\frac{n}{n+m}\,\frac{N+1}{N+M+1} + \frac{m}{n+m}\,\frac{N+1}{N+M+1}\Big]\frac{n}{n+m} \\ + \frac{n}{n+m}\,\frac{M}{N+M+1}\,\frac{n-1}{n+m} + \frac{m}{n+m}\,\frac{N}{N+M+1}\,\frac{n+1}{n+m}$$

da cui la forma proposta con semplici passaggi algebrici.

5. La durata T di un tipo di lampada è una variabile casuale avente una distribuzione uniforme nell'intervallo $(0 \leq T \leq k)$. Se si sostituisce immediatamente una lampada non appena si brucia (per esempio in una galleria),
a) calcolare la probabilità p_r che nel periodo τ $(\tau < k)$ si siano bruciate almeno r lampade, $(r = 0, 1, 2, \ldots)$
b) mostrare che il numero atteso di lampade bruciate durante il periodo di tempo τ è

$$e^{\tau/k} - 1 \quad (\tau < k).$$

È evidente che $p_0 = 1$. *Per* $r = 1$ *abbiamo facilmente che* $p_1 = \mathbb{P}(T_1 \le \tau) = \frac{\tau}{k}$, *dove abbiamo indicato con* T_1 *la durata della prima lampada. Per* $r = 2$ *abbiamo*

$$p_2 = \mathbb{P}(T_1 + T_2 \le \tau) = \int_0^\tau \mathbb{P}(T_1 \in dt_1, T_1 + T_2 \le \tau) = \int_0^\tau \mathbb{P}(T_1 \in dt_1, T_2 \le \tau - t_1).$$

Per l'indipendenza abbiamo

$$p_2 = \int_0^\tau \mathbb{P}(T_1 \in dt_1)\,\mathbb{P}(T_2 \le \tau - t_1) = \int_0^\tau \frac{dt_1}{k}\,\frac{\tau - t_1}{k} = \frac{\tau^2}{k^2\,2}.$$

Per induzione

$$p_r = \mathbb{P}(T_1 + T_2 + \cdots + T_r \le \tau) = \int_0^\tau \mathbb{P}(T_1 + T_2 + \cdots + T_{r-1} \in dt, T_1 + T_2 + \cdots + T_r \le \tau)$$

da cui

$$p_r = \int_0^\tau \mathbb{P}(T_1 + T_2 + \cdots + T_{r-1} \in dt, T_r \le \tau - t) = \int_0^\tau \frac{(r-1)t^{r-2}}{k^{r-1}(r-1)!}\,\frac{\tau - t}{k} dt = \frac{\tau^r}{k^r\,r!}.$$

per il quesito b) osserviamo che il numero atteso di lampade bruciate durante il periodo di tempo τ *è dato da*

$$\sum_{r=0}^\infty r\,(p_r - p_{r+1}) = \sum_{r=1}^\infty r\,p_r - \sum_{r=1}^\infty r\,p_{r+1} = \sum_{r=1}^\infty r\,p_r - \sum_{r=2}^\infty (r-1)\,p_r = p_1 + \sum_{r=2}^\infty p_r = e^{\tau/k} - 1.$$

Povo, 3 luglio 2015