• Considereremo vari integrali utili nel seguito.

Per verifica diretta si ha che

$$\Big(e^{-\alpha x}\frac{-\alpha\cos(\beta x)+\beta\sin(\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\Big)'=e^{-\alpha x}\cos(\beta x)$$

$$\Big(-e^{-\alpha x}\frac{\alpha\sin(\beta x)+\beta\cos(\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\Big)'=e^{-\alpha x}\sin(\beta x)$$

e quindi, per $\alpha>0$

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(\beta x)\,\mathsf{d}x=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin(\beta x)\,\mathsf{d}x=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}}$$

Risulta che

$$\int_0^\infty\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathsf{d}x=\lim_{p\to\infty}\int_0^p\frac{\sin x}{x}\mathsf{d}x.$$

Infatti integrando per parti abbiamo

$$\int_0^p\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathsf{d}x=-\frac{1}{p}\sin^2 p+\int_0^{p/2}\frac{\sin x}{x}\mathsf{d}x$$

da cui l'asserto passando al limite.

Ora risulta

$$\int_\epsilon^A\frac{\sin x}{x}\mathsf{d}x=\int_\epsilon^A\sin x\Big(\int_0^\infty e^{-tx}\mathsf{d}t\Big)\mathsf{d}x=\int_0^\infty\Big(\int_\epsilon^A e^{-tx}\sin x\mathsf{d}x\Big)\mathsf{d}t$$

dove lo scambio degli integrali è permesso per il terorema di Fubini.

Quindi

$$\int_\epsilon^A\frac{\sin x}{x}\mathsf{d}x=\int_0^\infty\Big(-e^{-tA}\frac{t\sin(A)+\cos(A)}{1+t^2}+e^{-t\epsilon}\frac{t\sin(\epsilon)+\cos(\epsilon)}{1+t^2}\Big)\mathsf{d}t$$

$$=\int_0^\infty -e^{-tA}\frac{t\sin(A)+\cos(A)}{1+t^2}\,\mathsf{d}t+\int_0^\infty e^{-t\epsilon}\frac{t\sin(\epsilon)}{1+t^2}\,\mathsf{d}t+\int_0^\infty e^{-t\epsilon}\frac{\cos(\epsilon)}{1+t^2}\,\mathsf{d}t$$

Il primo integrale in modulo è maggiorato da

$$\Big|\int_0^\infty -e^{-tA}\frac{t\sin(A)+\cos(A)}{1+t^2}\ \mathsf{d}t\Big| \leq C\int_0^\infty e^{-tA}\ \mathsf{d}t = \frac{C}{A} \to 0, \quad \text{per } A\to\infty$$

$$\frac{\sin(\epsilon)}{\epsilon}\sqrt{\epsilon}\int_0^\infty\ e^{-t\epsilon}\frac{\sqrt{t\epsilon}\sqrt{t}}{1+t^2}\mathsf{d}t \leq C\sqrt{\epsilon}\int_0^\infty\ \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\mathsf{d}t \leq C\sqrt{\epsilon}\to 0, \quad \text{per } \epsilon\to 0$$

Quindi

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathsf{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\mathsf{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathsf{d}t = \sqrt{\pi}}$$

Consideriamo la funzione $\phi(x)$

$$\phi(x) = \int_0^x e^{-t^2}\mathsf{d}t$$

la cui derivata è semplicemente

$$\phi'(x) = e^{-x^2}$$

Quindi

$$(\phi(x)^2)' = 2\phi'(x)\phi(x) = 2\int_0^x e^{-(x^2+t^2)}\mathsf{d}t = 2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\mathsf{d}t$$

da cui

$$(\phi(x)^2)' = -\Big(\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathsf{d}t\Big)'$$

in altri termini

$$\phi(x)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathsf{d}t = \mathsf{costante} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathsf{d}t = \frac{\pi}{4}$$

da cui per $x\to\infty$

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\mathsf{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-x^2} \mathsf{d}x = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{t^2}{4}}}$$

Intanto si ha facilmente che

$$\int_{\mathbb{R}} \sin(tx)\, e^{-x^2} \mathsf{d}x = 0.$$

Quindi, denotando con

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\, e^{-x^2} \mathsf{d}x,$$

derivando abbiamo

$$\varphi'(t) = -\int_{\mathbb{R}} x \sin(tx)\, e^{-x^2} \mathsf{d}x = \tfrac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \sin(tx)\, \mathsf{d}e^{-x^2}$$

da cui integrando per parti otteniamo

$$\varphi'(t) = -\frac{t}{2}\, \varphi(t)$$

Integrando e osservando che $\varphi(0) = \sqrt{\pi}$, otteniamo la formula.

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2} \mathsf{d}x = \pi\, e^{-|t|}}$$

Intanto si ha facilmente che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(tx)}{1+x^2} \mathsf{d}x = 0.$$

Quindi potremo scrivere

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} \mathsf{d}x = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \Big(\int_0^\infty e^{-s(1+x^2)} \mathsf{d}s \Big) \mathsf{d}x$$

da cui scambiando l'ordine degli integrali

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} \mathsf{d}x = \int_0^\infty e^{-s} \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-sx^2} \cos(tx) \mathsf{d}x \Big) \mathsf{d}s$$

Ci siamo ricondotti a calcolare l'integrale

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-sx^2} \cos(tx) \mathsf{d}x$$

Basta ora osservare che

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \varphi\Big(\frac{t}{\sqrt{s}}\Big)$$

quindi

$$\psi(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} e^{-\frac{t^2}{4s}}$$

Riassumendo abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} \mathsf{d}x = \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-\left(s+\frac{t^2}{4s}\right)} \frac{1}{\sqrt{s}} \mathsf{d}s$$

Per calcolare l'ultimo integrale osserviamo che tramite il cambiamento di variabile

$$r = \sqrt{s}$$

e l'identità

$$r^2 + \frac{t^2}{4r^2} = \Big(r - \frac{|t|}{2r}\Big)^2 + |t|$$

abbiamo che

$$\sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-\left(s+\frac{t^2}{4s}\right)} \frac{1}{\sqrt{s}} \mathsf{d}s = 2\sqrt{\pi}\, e^{-|t|} \int_0^\infty e^{-\left(r-\frac{|t|}{2r}\right)^2} \mathsf{d}r$$

Cambiando ulteriormente variabile

$$\xi = r - \frac{|t|}{2r}$$

otteniamo

$$\int_0^\infty e^{-\left(r-\frac{|t|}{2r}\right)^2} \mathsf{d}r = \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2} \big(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\xi}{2\sqrt{\xi^2+2|t|}}\big) \mathsf{d}\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Possiamo procedere anche nel modo seguente: intanto osservare che la funzione

$$\varrho(t) = \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+x^2} \mathsf{d}x = \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+x^2} \mathsf{d}x$$

è una funzione simmetrica di t, quindi possiamo considerare $t > 0$. Inoltre usando le prime formule abbiamo

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\mathsf{d}x = -\int_0^\infty \sin(tx)\frac{x}{1+x^2}\mathsf{d}x =$$
$$-\int_0^\infty \sin(tx)\Big[\int_0^\infty e^{-xz}\cos(z)\mathsf{d}z\Big]\mathsf{d}x =$$
$$-\int_0^\infty \cos(z)\Big[\int_0^\infty e^{-xz}\sin(tx)\mathsf{d}x\Big]\mathsf{d}z =$$
$$-\int_0^\infty \cos(z)\frac{t}{t^2+z^2}\mathsf{d}z = -\int_0^\infty \cos(tx)\frac{t^2}{t^2+t^2x^2}\mathsf{d}x$$

Concludendo otteniamo

$$\varrho'(t) = -\varrho(t)$$

che integrando dà

$$\varrho(t) = e^{-t}\varrho(0) = \frac{\pi}{2}e^{-t}.$$

Consideriamo il seguente integrale

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathsf{d}t$$

che è ben definito per $x > 0$. Al variare di x è la cosiddetta funzione gamma (oppure funzione di Eulero di seconda specie).
Risulta facilmente che

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad e \qquad \Gamma(n+1) = n!$$

0.0.1 La distribuzione gamma

Consideriamo la seguente densità di distribuzione di probabilità (su $\mathbb{R}^+$)

$$\gamma_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$$

La funzione caratteristica della distribuzione gamma è data da

$$\varphi(z) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - \mathtt{i}z}\right)^\alpha$$

dove scegliamo la determinazione (della potenza α) in modo che nello zero sia 1.

La media è data da $\frac{\alpha}{\lambda}$. la varianza è data da $\frac{\alpha}{\lambda^2}$.

0.0.2 La distribuzione beta

Definiamo

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathsf{d}t = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

ben definito per $a > 0$, $b > 0$.
Consideriamo la seguente densità di distribuzione di probabilità (su $[0,1]$)

$$\beta_{a,b}(x) = \frac{1}{B(a,b)}\, x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

Sia $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ e consideriamo la matrice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

che supponiamo simmetrica, cioè $a_{i,j} = a_{j,i}$, e definita positiva, cioè la forma quadratica

$$\langle Ax, x\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j > 0$$

per ogni vettore $x \neq 0$.

Risulta che esiste una matrice unitaria U ($U^T = U^{-1}$) tale che

$$U^{-1}AU = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Consideriamo la forma quadratica

$$q(x) = \langle A^{-1}x, x\rangle$$

e consideriamo il cambio di variabili $x = Uy$; allora

$$\tilde{q}(y) = q(Ux) = \langle A^{-1}Uy, Uy\rangle = \langle \Lambda^{-1}y, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{\lambda_i}$$

e quindi

$$e^{-\frac{1}{2}q(x)} = e^{-\frac{1}{2}\tilde{q}(y)} = e^{-\frac{1}{2}\tilde{\sum}_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{\lambda_i}} = \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}\frac{y_i^2}{\lambda_i}}$$

Inoltre

$$dx = |\det U|\; dy = dy$$

quindi

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}q(x)}\, dx = \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\frac{y_i^2}{\lambda_i}} dy_i = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{2\pi\lambda_i} = (\sqrt{2\pi})^n \sqrt{\det A}$$