1. Cenni di teoria della misura astratta

   Dimostrazione della formula per il cambiamento di variabili.
   Alcune proprietà di base dell'integrazione astratta di Lebesgue:
   Linearità
   Teorema di Beppo Levi
   Spazi L^p (non quozientati).
   Teorema della convergenza dominata (enunciato).

2. Definizione di valore di aspettazione e di varianza di una variabile casuale.

3. Funzione caratteristica

   Definizione di funzione caratteristica di una misura sui reali. Proprietà elementari.
   Inquadramento della definizione nel contesto della trasformata di Fourier.
   Esempi di calcolo della funzione caratteristica (esempi discreti e continui).
   Funzione caratteristica di una gaussiana.
   Condizioni necessarie e sufficienti affinché una funzione sia una funzione caratteristica (teorema di S. Bochner)
   Esercizi d'integrazione riguardanti le gaussiane n-dimensionali (forme quadratiche e diagonalizzazione).
   Funzione caratteristica per vettori casuali.
   Calcolo della funzione caratteristica della gaussiana. Caso della gaussiana n-dimensionale.
   Relazione tra le derivate della funzione caratteristica e i momenti di una variabile casuale.
   Combinazioni lineari di gaussiane sono gaussiane ($Y = MX$).
   Riduzione di variabili casuali a variabili casuali di media 0 e varianza 1.
   Calcolo della funzione caratteristica di una gaussiana multidimensionale.
   Gaussiane degeneri ($\det A = 0$).
   Varie applicazioni della funzione caratteristica. Limiti puntuali di successioni di funzioni caratteristiche.

4. Combinazioni lineari di gaussiane (sono ancora gaussiane, e calcolo relativo del vettore media e matrice di covarianza).

5. Ancora sulla distribuzione di probabilità congiunta di n variabili casuali (legge o misura immagine, funzione di verosimiglianza). Distribuzioni marginali.

6. Indipendenza.

7. Caso gaussiano. Calcolo della media e della matrice di covarianza tramite la funzione caratteristica (calcolata nell'origine).

8. Concetto di non-correlazione. Indipendenza implica la non-correlazione. Nel caso gaussiano vale anche il viceversa.

9. Generalità sui teoremi limite.

10. Vari tipi di convergenze nel Calcolo delle Probabilità:
    Riguardanti le variabili casuali.
    1. Convergenza in probabilità.
    2. Convergenza in L_p.
    3. Convergenza quasi ovunque.

    Riguardanti le leggi di variabili casuali.
    4. Convergenza in "legge" (sinonimi: debole, in distribuzione,...)

    Relazioni tra le varie convergenze. Disuguaglianza di Chebyshev. Equivalenza tra convergenza in legge e convergenza delle funzioni caratteristiche (enunciato del teorema di Lévy)

11. Teorema centrale e sua dimostrazione.

12. Legge dei grandi numeri (Caso L^1) -

13. Legge dei Grandi Numeri (Caso L^2) e dimostrazione. Caso "forte" e caso "debole" della Legge dei Grandi Numeri.

14. Teorema di Lévy (4 equivalenze per la convergenza in legge).

15. Considerazioni generali nell'uso della trasformata di Fourier.

16. Probabilità condizionale. Caso del condizionamento rispetto ad eventi di probabilità nulla: esempio di due variabili casuali.

17. Catene di Markov.

    Generalità e definizione. Motivazioni.
    Probabilità di transizione: esempi della relazione di Chapman-Kolmogorov.
    Calcolo delle distribuzioni congiunte.
    Esempio 2×2. Esempio della passeggiata casuale.
    Calcolo della P^n con la diagonalizzazione di P (caso 2×2). Passaggio al limite.
    Relazione di equivalenza tra stati (intercomunicabilità).
    Uso dei grafi per le catene di Markov.
    Misura invariante (distribuzione di probabilit invariante): $\mu = \mu P$. Caso 2×2.
    Periodo di uno stato.
    Tutti gli stati di una classe di equivalenza hanno lo stesso periodo. Periodo di una classe di equivalenza.
    Esempi: 2×2, passeggiata casuale, esempio di Ehrenfest.
    Probabilità di primo passaggio.
    Stati ricorrenti e transienti.
    Relazione tra probabilit di primo passaggio e probabilità di transizione in n tempi.
    Ricorrenza (e non) di una classe di equivalenza.

Teorema limite per catene di Markov ergodiche (irriducibili, aperiodiche e ricorrenti).
Una catena di Markov irrriducibile e finita è sempre ricorrente.
Esempio della passeggiata casuale (misura stazionaria).
Calcolo della misura stazionaria in vari esempi di passeggiata casuale con condizioni al bordo: condizioni assorbenti, condizioni riflettenti, miste.
Cenni sulle equazioni alle differenze.
Misura invariante nel modello di Ehrenfest.
Passeggiate casuali con condizioni al bordo. Caso del problema della "rovina del giocatore".

18. Catene di Markov a stati continui. Probabilità di transizione e misure invarianti.

    Studio dei modelli AR(1) (AutoRegressive).
    Estensione del metodo al caso di AR(2).
    Cenni sui modelli MA (Moving Average) e ARMA

19. Catene di Markov a tempi continui e stati discreti.

    Successione di tempi aleatori (variabili casuali non negative) indipendenti.
    Variabili casuali distribuite esponenzialmente: proprietà di "assenza di memoria" che le caratterizza (risoluzione della classica equazione funzionale).
    Calcolo della distribuzione della somma di variabili casuali esponenziali indipendenti ed equidistribuite: più in generale la distribuzione Gamma.
    Processo di Poisson.
    Processi di *nascita e morte*