Francesco Compagno

Esercizio: calcolare la densità della misura di probabilità condizionata associata a due variabili casuali X_t e X_s provenienti da un processo gaussiano di media $m(\cdot)$ e funzione di covarianza $a(\cdot,\cdot)$.

Soluzione: per il teorema di Radon-Nikodym, per ogni I, J coppia di boreliani, esiste una funzione misurabile $p(\cdot, I)$ tale che:

$$\mathbb{P}(X_s \in J, X_t \in I) = \int_J p(x,I)\mu_{X_s}(dx) := \int_J p(x,I)d\mu_{X_s}(x)$$

Siccome $p(\cdot, I)$ dipende anche da s e da t, scriveremo $p(\cdot, I) = p(s,\cdot;t,I)$. Per definizione:

$$\mathbb{P}(X_t \in I \mid X_s = x) = p(s,x;t,I)$$

quindi dobbiamo trovare la funzione $p(s,\cdot;t,I)$. Per definizione di processo Gaussiano abbiamo che il vettore (X_t, X_s) ha densità congiunta

$$f(x,y) := \frac{1}{2\pi\sqrt{|A|}} \exp(-\frac{1}{2}(x-m(s),y-m(t))A^{-1}(x-m(s),y-m(t))^t)$$

ove A è la matrice 2×2 che ha come elementi $a(i,j)$ per $i,j = s,t$. Allora otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_t \in J, X_s \in I) &= \int_{J\times I} f(x,y)dxdy = \int_J \left(\int_I f(x,y)dy\right)dx \\ &= \int_J \left(\int_I \frac{f(x,y)}{f_1(x)}dy\right) f_1(x)dx \\ &= \int_J \left(\int_I \frac{f(x,y)}{f_1(x)}dy\right) \mu_{X_s}(dx)\end{aligned}$$

ove f_1 è la densità di X_s, ovvero

$$f_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy$$

Per l'unicità della derivata di Radon-Nikodym quindi

$$p(s,x;t,I) = \int_I \frac{f(x,y)}{f_1(x)}dy \implies p(s,x;t,dy) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}dy$$

L'ultima espressione è proprio ciò che dobbiamo calcolare. Pertanto dobbiamo innanzitutto risolvere l'integrale che definisce $f_1(x)$. Per farlo scriviamo per semplicità $m_t = m(t)$, $m_s = m(s)$, $a_{st} = a(s,t)$. Inoltre valgono:

$$\begin{bmatrix} a_{ss} & a_{st} \\ a_{st} & a_{tt} \end{bmatrix} = |A|^{-1} \begin{bmatrix} a_{tt} & -a_{st} \\ -a_{st} & a_{ss} \end{bmatrix}$$

e

$$(x-m_s, y-m_t)A^{-1}(x-m_s,y-m_t)^t = |A|^{-1}a_{ss}((y-m_t)-\frac{a_{st}}{a_{ss}}(x-m_s))^2+|A|^{-1}(a_{tt}-\frac{a_{st}^2}{a_{ss}}(x-m_s))^2$$

perciò

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{2\pi\sqrt{|A|}} \exp(-\frac{1}{2}(x-m(s), y-m(t))A^{-1}(x-m(s), y-m(t))^t)dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{|A|}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\tfrac{1}{2}|A|^{-1}a_{ss}((y-m_t) - \frac{a_{st}}{a_{ss}}(x-m_s))^2 - \tfrac{1}{2}|A|^{-1}(a_{tt} - \frac{a_{st}^2}{a_{ss}}(x-m_s))^2)dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{|A|}} \exp(-\tfrac{1}{2}|A|^{-1}(a_{tt} - \frac{a_{st}^2}{a_{ss}}(x-m_s))^2) \int_{\mathbb{R}} \exp(-\tfrac{1}{2}|A|^{-1}a_{ss}(y-(m_t + \frac{a_{st}}{a_{ss}}(x-m_s)))^2 dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{|A|}} \exp(-\tfrac{1}{2}|A|^{-1}(a_{tt} - \frac{a_{st}^2}{a_{ss}}(x-m_s))^2) \int_{\mathbb{R}} \exp(-\tfrac{1}{2}|A|^{-1}a_{ss}y^2)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi a_{ss}}} \exp(-\tfrac{1}{2}|A|^{-1}(a_{tt} - \frac{a_{st}^2}{a_{ss}}(x-m_s))^2) \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi|A|a_{ss}^{-1}}} \exp(-\tfrac{1}{2}|A|^{-1}a_{ss}y^2)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi a_{ss}}} \exp(-\tfrac{1}{2}|A|^{-1}(a_{tt} - \frac{a_{st}^2}{a_{ss}}(x-m_s))^2)
\end{aligned}
$$

quindi

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x,y)}{f_1(x)} &= \frac{\tfrac{1}{2\pi\sqrt{|A|}} \exp(-\tfrac{1}{2}|A|^{-1}a_{ss}((y-m_t) - \tfrac{a_{st}}{a_{ss}}(x-m_s))^2 - \tfrac{1}{2}|A|^{-1}(a_{tt} - \tfrac{a_{st}^2}{a_{ss}}(x-m_s))^2)}{\tfrac{1}{\sqrt{2\pi a_{ss}}} \exp(-\tfrac{1}{2}|A|^{-1}(a_{tt} - \tfrac{a_{st}^2}{a_{ss}}(x-m_s))^2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi|A|a_{ss}^{-1}}} \exp(-\frac{1}{2|A|a_{ss}^{-1}}(y-(m_t + \frac{a_{st}}{a_{ss}}(x-m_s)))^2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2)
\end{aligned}
$$

dove abbiamo definito

$$\sigma^2 = \sigma^2(s,t) = |A|a_{ss}^{-1} \quad \text{e} \quad \mu = \mu(s,t) = m_t + \tfrac{a_{st}}{a_{ss}}(x-m_s)$$

Esercizio: usare l'esercizio precedente per calcolare l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(X_t \in dy \mid X_r = z)\mathbb{P}(X_r \in dz \mid X_s = x), \quad \text{con } s < r < t$$

Soluzione:dall'esercizio precedente, se chiamiamo $\sigma_1^2 = \sigma^2(s,r)$, $\sigma_2^2 = \sigma^2(r,t)$, $\mu_1 = \mu(s,r)$, $\mu_2 = \mu(r,t)$, abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\mu_1 &= m_r + \frac{a_{sr}}{a_{ss}}(x-m_s) \quad \sigma_1^2 = \frac{a_{ss}a_{rr} - a_{sr}^2}{a_{ss}} \\
\mu_2 &= m_t + \frac{a_{rt}}{a_{rr}}(z-m_r) \quad \sigma_2^2 = \frac{a_{rr}a_{tt} - a_{rt}^2}{a_{rr}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(X_t \in dy \mid X_r = z)\mathbb{P}(X_r \in dz \mid X_s = x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma_2^2}(y-\mu_2)^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(z-\mu_1)^2) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma_2^2}(y-\mu_2)^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(z-\mu_1)^2) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}(\sigma_1^2(y-\mu_2)^2 + \sigma_2^2(z-\mu_1)^2)) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}(\sigma_1^2(y-\mu_2)^2 + \sigma_2^2(z-\mu_1)^2)) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}(\sigma_1^2(y-m_t-\frac{a_{rt}}{a_{rr}}(z-m_r))^2 + \sigma_2^2(z-\mu_1)^2)) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}(\sigma_1^2(y-m_t-\frac{a_{rt}}{a_{rr}}(z+\mu_1-m_r))^2 + \sigma_2^2 z^2))
\end{aligned}
$$

ora, espandendo l'esponente dell'esponenziale:

$$\sigma_1^2(y-m_t-\frac{a_{rt}}{a_{rr}}(z+\mu_1-m_r))^2+\sigma_2^2z^2 = \sigma_1^2(y-\frac{a_{rt}}{a_{rr}}z-(m_t+\frac{a_{rt}a_{sr}}{a_{ss}a_{rr}}(x-m_s)))^2+\sigma_2^2z^2$$

ora (siccome abbiamo sbirciato la soluzione) poniamo:

$$\mu = m_t + \frac{a_{rt}a_{sr}}{a_{ss}a_{rr}}(x-m_s)$$

allora l'esponente diventa

$$\sigma_1^2(y-\frac{a_{rt}}{a_{rr}}z-\mu)^2+\sigma_2^2z^2 = \sigma_1^2(y-\mu)^2 - 2\sigma_1^2(y-\mu)\frac{a_{rt}}{a_{rr}}z + (\sigma_1^2\frac{a_{rt}^2}{a_{rr}^2}+\sigma_2^2)z^2$$

ora poniamo

$$\sigma^2 = (\sigma_1^2\frac{a_{rt}^2}{a_{rr}^2}+\sigma_2^2) = a_{tt} - \frac{a_{rt}^2a_{sr}^2}{a_{rr}^2a_{ss}}$$

dove è facile verificare che vale l'ultima uguaglianza. Allora l'esponente diventa, dopo aver completato il quadrato rispetto alla variabile z:

$$\sigma^2(z-\text{qualcosa})^2 + \sigma_1^2(y-\mu)^2 - \frac{(\sigma_1^2(y-\mu)\frac{a_{rt}}{a_{rr}})^2}{\sigma^2}$$

perciò l'integrale risulta:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}(\sigma_1^2(y-\mu)^2 - \frac{(\sigma_1^2(y-\mu)\frac{a_{rt}}{a_{rr}})^2}{\sigma^2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\frac{a_{rr}^2\sigma^2-\sigma_1^2a_{rt}^2}{\sigma_2^2a_{rr}^2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2})
\end{aligned}
$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che, come è facile verificare espandendo le definizioni:

$$\frac{a_{rr}^2\sigma^2 - \sigma_1^2 a_{rt}^2}{\sigma_2^2 a_{rr}^2} = 1$$

Esercizio: verificare che se f e σ (i cui argomenti scriveremo a pedice per risparmiare spazio) sono funzioni differenziabili mai nulle allora le variabili casuali

$$X_t := \sigma_t f_t \int_0^t \frac{dW_s}{f_s}$$

soddisfano l'equazione integrale

$$X_t = \int_0^t \frac{(f_s\sigma_s)'}{f_s\sigma_s} X_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

inoltre si calcoli la covarianza di X_t e X_s

Soluzione:

$$\begin{aligned}
& X_t = \int_0^t \frac{(f_s\sigma_s)'}{f_s\sigma_s} X_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \\
\iff & X_t = \int_0^t \frac{(f_s\sigma_s)'}{f_s\sigma_s} X_s ds + \sigma_t W_t - \int_0^t W_s \sigma_s' ds \\
\iff & X_t + \int_0^t W_s \sigma_s' ds - \sigma_t W_t = \int_0^t \frac{(f_s\sigma_s)'}{f_s\sigma_s} \sigma_s f_s \int_0^s \frac{dW_u}{f_u} du \\
\iff & \sigma_t f_t \int_0^t \frac{dW_s}{f_s} + \int_0^t W_s \sigma_s' ds - \sigma_t W_t = \int_0^t (\sigma_s' f_s + f_s' \sigma_s) \left(\frac{W_s}{f_s} + \int_0^s W_u \frac{f_u'}{f_u^2} du \right) ds \\
\iff & \sigma_t f_t \left(\frac{W_t}{f_t} + \int_0^t W_u \frac{f_s'}{f_s^2} ds \right) + \int_0^t W_s \sigma_s' ds - \sigma_t W_t = \int_0^t \frac{\sigma_s' f_s + f_s' \sigma_s}{f_s} W_s ds \\
& \qquad + \int_s^t \int_0^s (\sigma_s' f_s + f_s' \sigma_s) W_u \frac{f_u'}{f_u^2} du ds \\
\iff & \sigma_t f_t \int_0^t W_u \frac{f_s'}{f_s^2} ds = \int_0^t \frac{f_s' \sigma_s}{f_s} W_s ds + \int_0^t (\sigma - s f_s)' \left(\int_0^s W_u \frac{f_u'}{f_u^2} du \right) ds \\
\iff & \sigma_t f_t \int_0^t W_u \frac{f_s'}{f_s^2} ds = \int_0^t \frac{f_s' \sigma_s}{f_s} W_s ds + \sigma_t f_t \int_0^t \frac{f_s'}{f_s^2} ds - \int_0^t \sigma_s f_s \left(\int_0^s W_u \frac{f_u'}{f_u^2} du \right)' ds \\
\iff & 0 = 0
\end{aligned}$$

Per trovare la covarianza $a(s,t) = \mathbb{E}((x_s - \mathbb{E}(X_s))(x_t - \mathbb{E}(X_t)))$ calcoliamo prima l'aspettazione:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_t) &= \int_\Omega \sigma_t f_t \int_0^t \frac{dW_s(\omega)}{f_s} d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega \sigma_t f_t \frac{W_t(\omega)}{f_t} d\mathbb{P}(\omega) + \int_\Omega \sigma_t t f_t \int_0^t W_s(\omega) \frac{f_s'}{f_s^2} ds d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \sigma_t \mathbb{E}(W_t) + \sigma_f f_t \int_0^t \frac{f_s'}{f_s^2} \int_\Omega W_s(\omega) d\mathbb{P}(\omega) ds \\
&= 0
\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che il processo di Wiener ha media nulla. Nel seguito scriveremo $d\omega$ in luogo di $d\mathbb{P}(\omega)$ per brevità. Cominciamo il calcolo della covarianza:

$$
\begin{aligned}
a(s,t) &= \mathbb{E}(X_s X_t) = \int_\Omega X_s(\omega)X_t(\omega)d\omega \\
&= \int_\Omega \Bigg(\sigma_t W_t(\omega)\sigma_s W_s(\omega) + \sigma_t W_t(\omega)\sigma_s f_s \int_0^s \frac{f_u'}{f_u^2} W_u\, du + \sigma_s W_s(\omega)\sigma_t f_t \int_0^t \frac{f_v'}{f_v^2} W_v\, dv \\
&\qquad\qquad + \sigma_s\sigma_t f_s f_t \int_0^s \frac{f_u'}{f_u^2} W_u\, du \int_0^t \frac{f_v'}{f_v^2} W_v\, dv \Bigg) d\omega \\
&= \sigma_t\sigma_s s\wedge t + \sigma_t\sigma_s f_s \int_0^2 \frac{f_u'}{f_u^2} t\wedge u\, du + \sigma_s\sigma_t f_t \int_0^2 \frac{f_v'}{f_v^2} s\wedge v\, dv \\
&\qquad\qquad + \sigma_s\sigma_t f_s f_t \int_0^s \int_0^t \frac{f_u'}{f_u^2}\frac{f_v'}{f_v^2} v\wedge u\, dudv
\end{aligned}
$$

dove nell'ultimo passaggio in ciascun addendo abbiamo commutato gli integrali e usato il fatto che la funzione di covarianza del processo di Wiener è $s\wedge t$. abbiamo quindi un'espressione composta di 4 addendi. Li definiamo dal primo al quarto come, rispettivamente $A_1(s,t)$, $A_2(s,t)$, $A_3(s,t)$, $A_4(s,t)$. Allora notiamo che, supponendo $s<t$:

$$
\begin{aligned}
& A_1(s,t) = \sigma_t\sigma_s s\wedge t \\
& A_2(s,t) = \sigma_t\sigma_s f_s \int_0^2 \frac{f_u'}{f_u^2} u\, du = \sigma_t\sigma_s f_s \Bigg(-\frac{s}{f_s} + \int_0^s \frac{1}{f_u} du \Bigg) = -s\sigma_t\sigma_s + \sigma_t\sigma_s f_s \int_0^s \frac{1}{f_u} du \\
& A_3(s,t) = A_2(t,s) \\
& A_4(s,t) = \sigma_s\sigma_t f_s f_t \int_0^s \int_0^t \frac{f_u'}{f_u^2}\frac{f_v'}{f_v^2} v\wedge u\, dudv \\
& = \sigma_s\sigma_t f_s f_t \iint_A \frac{f_u'}{f_u^2}\frac{f_v'}{f_v^2} v\, dudv + \sigma_s\sigma_t f_s f_t \iint_B \frac{f_u'}{f_u^2}\frac{f_v'}{f_v^2} u\, dudv
\end{aligned}
$$

ora, in A_4 le regioni A e B sono le due parti del rettangolo $\{0\leq x\leq s,\ 0\leq y\leq t\}$ in cui $v\leq u$ e $u\leq v$ rispettivamente. Risolvendo questi due ultimi integrali otteniamo:

$$
\begin{aligned}
& \iint_A \frac{f_u'}{f_u^2}\frac{f_v'}{f_v^2} v\, dudv = \int_0^s \int_0^u \frac{f_u'}{f_u^2}\frac{f_v'}{f_v^2} v\, dudv = \ldots = -\int_0^s \frac{f_u'}{f_u^3} u\, du - \frac{1}{f_s}\int_0^s \frac{1}{f_u} du + \int_0^s \frac{1}{f_u^2} du \\
& \iint_B \frac{f_u'}{f_u^2}\frac{f_v'}{f_v^2} u\, dudv = \int_0^s \int_u^t \frac{f_u'}{f_u^2}\frac{f_v'}{f_v^2} u\, dudv = \ldots = \int_0^s \frac{f_u'}{f_u^3} u\, du + \frac{s}{f_t f_s} - \frac{1}{f_t}\int_0^s \frac{1}{f_u} du
\end{aligned}
$$

A questo punto molti addendi si semplificano permettendoci di ottenere:

$$
a(s,t) = \sigma_s\sigma_t f_s f_t \int_0^s \frac{du}{f_u^2} = \sigma_s\sigma_t f_s f_t \int_0^{s\wedge t} \frac{du}{f_u^2}
$$