

$$\begin{aligned}
p(s, x; t, I) &= \mathbb{P}(X_t \in I \mid X_s = x) \\
&\mathbb{P}(X_t \in I, X_s \in J) \\
\mathbb{P}(X_t \in I, X_s \in J) &= \int_J \mathbb{P}(X_t \in I \mid X_s = x) \mathbb{P}(X_s \in dx) \\
\mathbb{P}(X_t \in I, X_s \in J) &= \mathbb{P}(X_t \in I, X_r \in \mathbb{R}, X_s \in J) \\
\mathbb{P}(X_t \in I, X_s \in J) &= \int_{\mathbb{R} \times J} \mathbb{P}(X_t \in I \mid X_r = z, X_s = x) \mathbb{P}(X_r \in dz, X_s \in dx) \\
\mathbb{P}(X_t \in I, X_s \in J) &= \int_{\mathbb{R} \times J} \mathbb{P}(X_t \in I \mid X_r = z) \mathbb{P}(X_r \in dz, X_s \in dx) \\
\mathbb{P}(X_t \in I, X_s \in J) &= \int_{\mathbb{R} \times J} \mathbb{P}(X_t \in I \mid X_r = z) \mathbb{P}(X_r \in dz \mid X_s = x) \mathbb{P}(X_s \in dx) \\
\mathbb{P}(X_t \in I, X_s \in J) &= \int_J \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(X_t \in I \mid X_r = z) \mathbb{P}(X_r \in dz \mid X_s = x) \right] \underbrace{\mathbb{P}(X_s \in dx)}_{\mu_s(dx)} \\
\mathbb{P}(X_t \in I \mid X_s = x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(X_t \in I \mid X_r = z) \mathbb{P}(X_r \in dz \mid X_s = x) \quad x \text{ a.s } \mu_s \\
p(s, x; t, I) &= \int_{\mathbb{R}} p(r, z; t, I) p(s, x; r, dz) \quad x \text{ a.s } \mu_s
\end{aligned}$$