• Supponiamo di avere una successione di eventi $\{A_n\}$ e consideriamo l'evento

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \quad (= \limsup A_n).$$

Ebbene, ω appartiene ad A se e solo se esiste almeno una sottosuccessione $\{A_{n_i}(\omega)\}$, con $n_1(\omega) < n_2(\omega) < \cdots$, tale che ω appartiene ad ogni A_{n_i}.

Corrispondentemente

$$A^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c \quad (= \liminf A_n^c = (\limsup A_n)^c)$$

Ebbene, ω appartiene ad A^c se e solo se da un certo indice $m(\omega)$ risulta che ω appartiene ad ogni A_n per ogni $n \geq m(\omega)$.

• Osserviamo inoltre che, definendo $B_m = \bigcup_{n \geq m} A_n$, si ha che

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots, \qquad \text{e, per ogni } k, \qquad \bigcap_{m \geq k} B_m \equiv A$$

e quindi

$$\mathbb{P}(B_m) \searrow \mathbb{P}(A).$$

• Data ora una successione di variabili casuali $\{X_n\}$a valori in uno spazio di Banach reale e separabile $\mathfrak{X}$, con norma $\|\cdot\|$, tale che $X_n(\omega) \to X(\omega)$ per quasi ogni ω e denotando con N l'evento di probabilità nulla degli ω dove la successione non converge, allora, per ogni $\varepsilon > 0$ considerando la famiglia degli eventi $A_n := \{\|X_n - X\| > \varepsilon\}$, abbiamo che

$$A \subset N \qquad \text{e quindi } \mathbb{P}(A) = 0.$$

D'altra parte $A_n \subset B_n$, da cui $\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) \to 0$: quindi la successione tende ad X anche in probabilità.

Sia $\mathfrak{X}$ uno spazio di Banach reale e separabile, con norma $\|\cdot\|$. Sia $\{X_n\}$ una successione di variabili casuali a valori in $\mathfrak{X}$, tale che per ogni $a > 0$ risulti

$$\mathbb{P}(\|X_n - X_m\| > a) \to 0 \quad \text{for } n, m \to \infty,$$

cioè la successione è una successione di Cauchy in probabilità.

•(punto 1) Scegliamo in un modo qualunque una successione $\{a_i\}$ di numeri positivi tale che $\sum_k a_i < \infty$. (Per esempio $a_i = 2^{-i}$)

•(punto 2) Costruiamo una sottosuccessione $\{X_{n_i}\}$ in modo tale che

$$\mathbb{P}(\|X_{n_{i+1}} - X_{n_i}\| > a_i) < 2^{-i}$$

•(punto 3) Per il lemma di Borel-Cantelli applicato alla successione

$$A_i := \{\|X_{n_{i+1}} - X_{n_i}\| > a_i\}$$

abbiamo che

$$\mathbb{P}(A) = 0, \qquad \text{dove } A = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{i \geq k} A_i$$

•(punto 4) Quindi per $\omega \notin A$ abbiamo che

$$\omega \in A^c = \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{i \geq k} A_i^c$$

e quindi esiste un $k(\omega) \geq 1$ tale che

$$\|X_{n_{i+1}} - X_{n_i}\| \leq a_i \qquad \text{per ogni } i \geq k(\omega)$$

•(punto 5) La successione $\{X_{n_i}(\omega)\}$ è di Cauchy in $\mathfrak{X}$. Infatti

$$\|X_{n_{\nu+p}}(\omega) - X_{n_\nu}(\omega)\| \leq \sum_{i=\nu}^{\nu+p-1} \|X_{n_{i+1}}(\omega) - X_{n_i}(\omega)\| \leq \sum_{i=\nu}^{\nu+p-1} a_i$$

e quindi esiste una variabile casuale X a valori in $\mathfrak{X}$ tale che $X_{n_i} \to X$ quasi ovunque, e dunque anche in probabilità.

•(punto 6) L'intera successione $\{X_n\}$ converge in probabilità a X. Infatti

$$\|X_n(\omega) - X(\omega)\| \leq \|X_n(\omega) - X_{n_i}(\omega)\| + \|X_{n_i}(\omega) - X(\omega)\|$$

da cui

$$\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(\|X_n - X_{n_i}\| > \tfrac{\varepsilon}{2}) + \mathbb{P}(\|X_{n_i} - X\| > \tfrac{\varepsilon}{2}).$$