

$$X(t, \omega) = \left(\int_0^t f(s) dW_s \right) (\omega)$$

$$\|f_n - f\|_{L^2(0,t)} \rightarrow 0, f_n \in C^1([0, t])$$

$$X_n(t) = \int_0^t f_n(s) dW_s = f_n(t)W_t - \int_0^t W_s f'_n(s) ds$$

$$\mathbb{E}(|X_n(t) - X_m(t)|^2) = \int_0^t |f_n(s) - f_m(s)|^2 ds = \|f_n - f\|_{L^2(0,t)}^2 \rightarrow 0$$

$$X_n(t) \rightarrow X(t) \quad \text{in } L^2(\Omega) \quad \text{e quindi anche in probabilità}$$

$$\mathbb{P}\left(\max_{0 \leq s \leq t} |X_n(s) - X_m(s)| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}(|X_n(t) - X_m(t)|^2) \rightarrow 0$$

$$\mathbb{P}\left(\|X_n(\cdot) - X_m(\cdot)\|_{C([0,t])} > \varepsilon\right) \rightarrow 0$$

Esiste un $Y(t)$ a traiettorie continue tale che

$$\mathbb{P}\left(\|X_n(\cdot) - Y(\cdot)\|_{C([0,t])} > \varepsilon\right) \rightarrow 0$$

$$|X_n(t) - Y(t)| \leq \|X_n - Y\|_{C([0,t])} \implies (|X_n(t) - Y(t)| > \varepsilon) \subset (\|X_n - Y\|_{C([0,t])} > \varepsilon)$$

Per ogni t , $X_n(t) \rightarrow Y(t)$ in probabilità, da cui $X(t) = Y(t)$ quasi certamente.

Definiamo il processo

$$X_t = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

Esso è u processo di diffusione con densità di probabilità di transizione per $x, y > 0$

$$p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t} y} e^{-\frac{\left(\log\left(\frac{y}{x}\right) - t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)^2}{2\sigma^2 t}}$$

Essa è la *soluzione fondamentale* delle equazioni (di Kolmogorov) associate:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \mu x \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}(y^2 p) - \mu \frac{\partial}{\partial y}(yp) = \frac{1}{2}\sigma^2 y^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + (2\sigma^2 - \mu)y \frac{\partial p}{\partial y} + (\sigma^2 - \mu)p$$

Friedman, Avner (1964), PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.

Levi, Eugenio Elia (1907), *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali totalmente ellittiche*, Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche, Naturali, Serie V, 16 (12): 932-938

Levi, Eugenio Elia (1907), *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 24 (1): 275-317

$$p_t(i, j) = \begin{cases} 0 & j < i \\ \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} & j \geq i \end{cases}$$

$$p_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$\frac{\partial p_t}{\partial t}(0) = -\lambda p_t(0), \quad \frac{\partial p_t}{\partial t}(k) = -\lambda (p_t(k) - p_t(k-1)) \quad k \geq 1, \quad p_0(k) = \delta_0(k)$$

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} p_t(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ p_t(1) & p_t(0) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ p_t(2) & p_t(1) & p_t(0) & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_t(k) & p_t(k-1) & p_t(k-2) & \cdots & p_t(1) & p_t(0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$