

Tre variabili casuali?

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

" ω " si verifica

$$X(\omega), Y(\omega), Z(\omega)$$

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \square)$$

$$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$$

misurabile

variabile casuale

$$X^{-1}(I) \in \mathcal{E}$$

$$\forall I \in \mathcal{B}$$

↑
nulla

$$X: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\Omega_1, \mathcal{E}_1, \mathbb{P}_1)$$

$$(\omega_1)$$

$$Y: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\Omega_2, \mathcal{E}_2, \mathbb{P}_2)$$

$$(\omega_2)$$

$$Z: \Omega_3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\Omega_3, \mathcal{E}_3, \mathbb{P}_3)$$

$$(\omega_3)$$

In altre parole avere 3 variabili casuali su uno stesso $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ significa considerare anche le correlazioni tra loro.

Parole chiave: correlazione

In ultima analisi:

$$U = (X, Y, Z): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$$

è una "mappa" misurabile?

$$(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_3)$$

"variabile casuale a valori vettoriali"

$$U^{-1}(I) \in \mathcal{G}$$

$$\underline{I \in \mathcal{B}^3 \text{ borelismo di } \mathbb{R}^3}$$

Risposta: SI

$$X, Y, Z \text{ v.c. su } (\Omega, \mathcal{G}, P) \Leftrightarrow U \text{ v.c. su } (\Omega, \mathcal{G}, P)$$

Ricordiamo che $\mu(I) = P(X^{-1}(I))$ e'

la distribuzione di probabilità della v.c. X . In altre parole μ è la misura immagine di P attraverso X . legge di X

(X, Y, Z)

μ_X, μ_Y, μ_Z

queste esistono anche nel caso
 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$

mancano come sono correlate:

$$\mu(I) = P(U^{-1}(I))$$

$$\underline{\underline{I \in \mathcal{B}^3}}$$

è la misura immagine di P tramite U
cioè (X, Y, Z) considerate come vettore!!!

μ si chiama anche distribuzione di probabilità congiunta - legge di U -

Conoscere $\mu \Rightarrow$ conoscere anche μ_x, μ_y, μ_z

$$\mu_x(I) = \mu(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

$$\mu_y(J) = \mu(\mathbb{R} \times J \times \mathbb{R})$$

$$\mu_z(K) = \mu(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times K)$$

$$\begin{array}{l} I \in \mathcal{B}' \\ \hline J \in \mathcal{B}' \\ K \in \mathcal{B}' \end{array}$$

$I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times J \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times K \in \mathcal{B}^3$ -

Posso ricavare anche le distribuzioni congiunte a due a due.

$$\mu_{xy}(I) = \mu(I \times \mathbb{R})$$

$$I \in \mathcal{B}^2$$

$$I \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\mu_{xz}(J) = \mu(\mathbb{R} \times J \times \mathbb{R})$$

$$J \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$K \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\mu_{yz}(K) = \mu(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times K)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_x, \mu_y, \mu_z \\ \mu_{xy}, \mu_{xz}, \mu_{yz} \\ \mu_{xyz} \end{array} \right.$$

(leggi)
distribuzioni marginali

marginali

marginals

Notazione probabilistica

$$\mu_x(I_1) = \mathbb{P}(X \in I_1)$$

$$\mu_{xy}(I_{(2)}) = P((X,Y) \in I_{(2)})$$

$$\mu(I_{(3)}) = P((X,Y,Z) \in I_{(3)})$$

sottofamiglia di boreliani che "generano" i boreliani
formata dai "rettangoli"

$$I_{(1)} = I$$

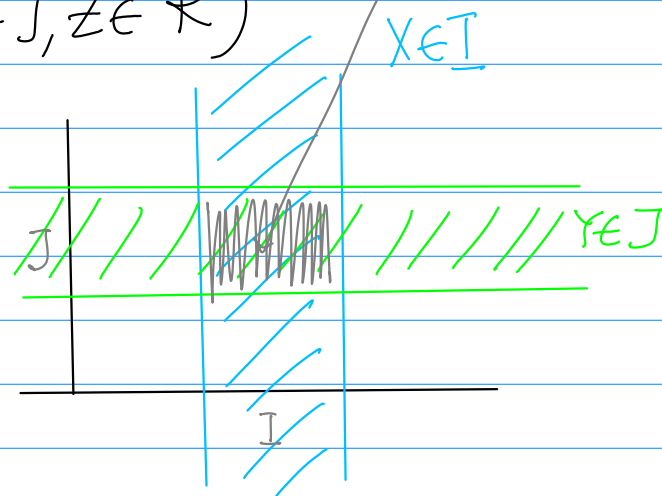
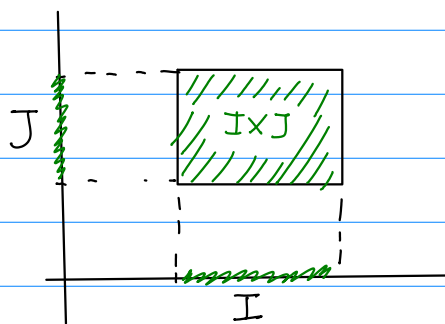
$$I_{(2)} = I \times J$$

$$I_{(3)} = I \times J \times K$$

$$\mu_X(I_{(1)}) = P(X \in I)$$

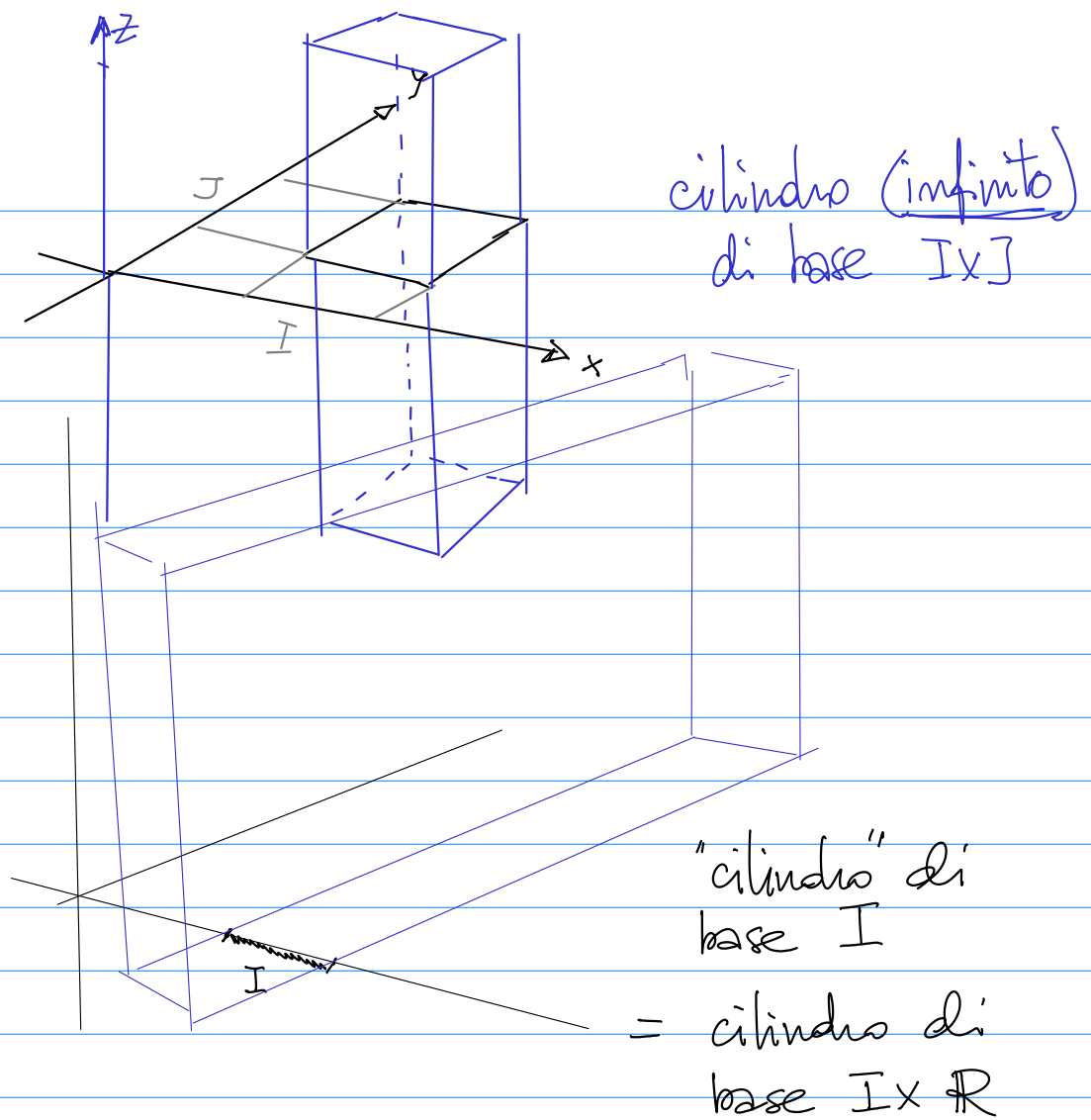
$$\mu_{xy}(I_{(2)}) = P(X \in I, Y \in J) = P((X \in I) \cap (Y \in J))$$

$$\mu_{xyz}(I_{(3)}) = P(X \in I, Y \in J, Z \in K)$$



non c'è Z ; però

$$P(X \in I, Y \in J) = P(X \in I, Y \in J, Z \in \mathbb{R})$$



Ricordiamo che conoscere μ sui rettangoli è sufficiente a "ricostruire" (risovarsi) μ su tutti i boreliani (e relativo complemento, quando necessario)

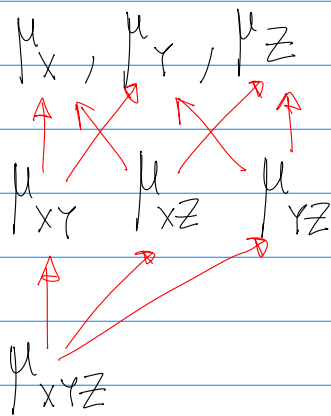
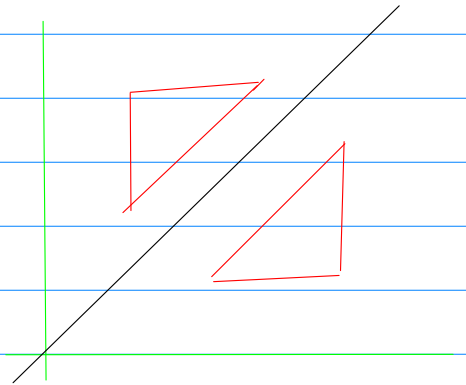
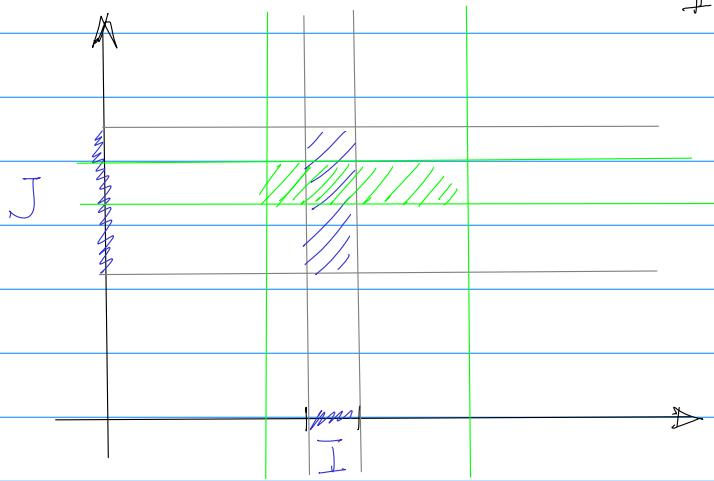
Osservazione: potremo considerare le misure

$$\mu_{YX}, \mu_{ZX}, \mu_{ZY}, \overset{\mu_{XYZ}}{\mu_{XZY}}, \mu_{ZXY}, \mu_{YXZ},$$

$$3! = 6$$

$$\mu_{YZX}, \mu_{ZYX},$$

Consideriamo il caso di $\mu_{XY}(I \times J) = \mathbb{P}(X \in I, Y \in J)$
 $= \mathbb{P}(Y \in J, X \in I) = \mu_{YX}(J \times I)$



$\mu = \mu_{XYZ}$ ci sono TUTTE le informazioni

Quando ho una infinità di variabili casuali
 Una "infinità" numerabile

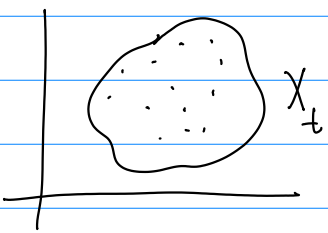
$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, \dots, X_{126}, \dots, X_{327}, \dots$$

oppure una "infinità" continua

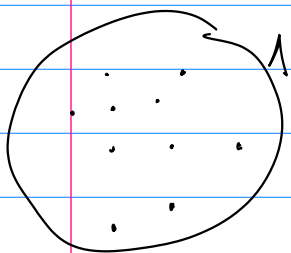
$$\{X_t, t \in \mathbb{R}\}, \{X_t, t \geq 0\} = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$$

$$\{X_t, t \in [0, T]\}, \{X_t, t \in [a, b]\}$$

$(0, T]$ secondo le circostanze e
 $(0, T)$ il modello scelto.

$$\downarrow \{X_t, t \in \Lambda \subset \mathbb{R}^2\}$$


1' interpretazione temporale come "random field"



scalar random field

(campo scalare)

vector random field

(campo vettoriale)

Processo stocastico

$\{X_t, t \in \text{insieme di indici}\}$

$\{X_t, t \in [0, T]\}$

$\omega \in \Omega$

$t \rightarrow X_t(\omega)$

lo spazio di tutte le funzioni $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^{[0, T]}$

spazio prodotto

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

tutt. ~~funzioni~~ $f: \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$

$\{ \mathbb{R}^{[0, T]}, \mathcal{B}, \dots \}$

$$\begin{array}{l}
 [0, T] \\
 \mathbb{R} \\
 2^{\mathbb{R}}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \mathbb{N} \quad \mathbb{N}_0 \\
 \mathbb{R} \quad \mathbb{C}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \mathbb{R}^2 \\
 \mathbb{R}^3 \\
 \mathbb{R}^{\mathbb{N}}
 \end{array}$$

$$\mathbb{B}_{\mathbb{R}} \subset 2^{\mathbb{R}}$$

$$\begin{array}{l}
 [0, T] \\
 \mathbb{R}
 \end{array}$$

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n \in [0, T]$$

insiemi cilindrici

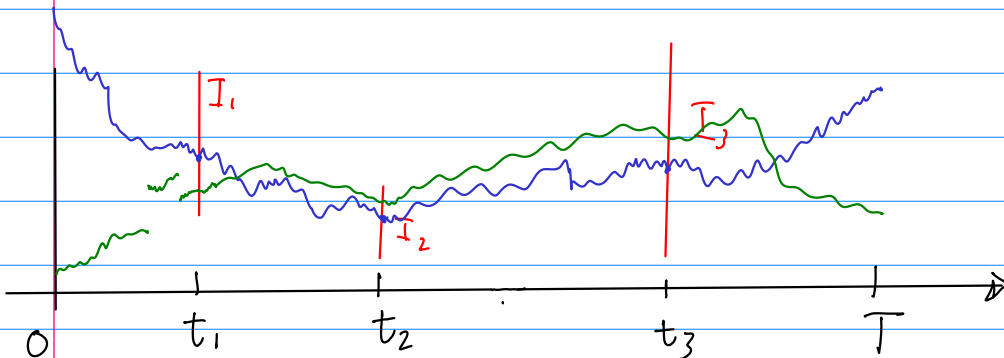
$$C_{t_1, t_2, \dots, t_n, B} = \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0, T]} : (f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_n)) \in B \right\}$$

B boreliano di $\mathbb{R}^n$

$$t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$$

$$B = I_1 \times I_2 \times I_3$$

$$\begin{aligned}
 C_{t_1, t_2, t_3, B} &= \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0, T]} : (f(t_1), f(t_2), f(t_3)) \in B \right\} = \\
 &= \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0, T]} : f(t_1) \in I_1, f(t_2) \in I_2, f(t_3) \in I_3 \right\}
 \end{aligned}$$



$\{ C_{t_1, t_2, \dots, t_n, B} \}$ Th. è un'algebra

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{[0,T]} &= C_{t, \mathbb{R}} = \{f: f(t) \in \mathbb{R}\} \\ &= C_{t_1, t_2, \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{f: f(t_1) \in \mathbb{R}, f(t_2) \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$C_{t_1, t_2, \dots, t_n, B}^c = C_{t_1, t_2, \dots, t_n, B^c}$$

$$C_{t_1, t_2, \dots, t_n, B'} \cup C_{s_1, s_2, \dots, s_m, B''}$$

$B' \in \mathcal{B}^m$
 $B'' \in \mathcal{B}^m$

$$= C_{r_1, r_2, \dots, r_k, \underline{B}}$$

$$t_n < s$$

$$C_{t_1, t_2, \dots, t_n, B'} \cup C_{s, I}$$

|| "

$$C_{t_1, t_2, \dots, t_n, s, \underbrace{B' \times \mathbb{R}}_{\mathbb{R}^{m+1}}}$$

$$C_{t_1, t_2, \dots, t_n, s, \underbrace{\mathbb{R}^m \times I}_{\mathbb{R}^{n+1}}}$$

$$\mathcal{C} = \{C_{t_1, t_2, \dots, t_n, B}\}$$

$$\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$$

$$(\mathbb{R}^{[0,T]}, \sigma(\mathcal{C}))$$

$$\{X_t, t \in [0, T]\}$$

$$\omega \in \Omega \quad t \mapsto X_t(\omega) \in \mathbb{R}^{[0, T]}$$

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{[0, T]}$$

X è misurabile

$$\begin{array}{c} \cancel{\mathbb{R}^{[0, T]}} \\ \mathbb{R}^{[0, T]}, \sigma(\mathcal{E}) \end{array}$$

Teorema: $X^{-1}(B) \in \mathcal{E} \quad \forall B \in \sigma(\mathcal{E})$

X è $\mathcal{E} - \sigma(\mathcal{E})$ -misurabile

L'attore $\mathbb{P}$

$$B \in \sigma(\mathcal{E})$$

$$Q_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

$$(\mathbb{R}^{[0, T]}, \sigma(\mathcal{E}), Q_X)$$

$$(Y_t, t \in [0, T])$$

$$Y_t: (\Omega', \mathcal{E}', \mathbb{P}')$$

$$(\mathbb{R}^{[0, T]}, \sigma(\mathcal{E}), \mathbb{Q}_Y)$$