

PROCESSI DI MARKOV

$$t \in [0, T]$$
$$\mathbb{N}$$
$$\mathbb{Z}$$
$$\mathbb{R}$$

(X_t) rispetto a $(\mathcal{F}_t)$ M.P.

1. (X_t) è adattato a $(\mathcal{F}_t)$ $\mathcal{F}_t^0 \subset \mathcal{F}_t$

$$2. \quad \mathbb{P}(X_t \in I \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in I \mid X_s) \quad s < t$$

Definizione

$$\mathbb{P}(X_t \in I | X_s) = \varphi_{s,t,I}(X_s)$$

φ è data a meno di insiemi di misura

$I \in \mathcal{B}^1$ Borel zu $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{P}(X_s \in dx)$$

null

$$\varphi_{s,t,I}(x) = \mathbb{P}(X_t \in I \mid X_s = x) = p(s, x; t, I)$$

$$(s, x, t) \xrightarrow{\text{boreliano}} p(s, x, t, \underline{I}) \quad \underline{I} \text{ fisso}$$

$$\underline{I} \xrightarrow{\text{misura di probabilit\`a}} p(s, x, t, \underline{I}) \quad (s, x, t) \text{ fisso}$$

relazione di Chapman - Kolmogorov $s < r < t$

$$p(s, x; t, \underline{I}) = \int_{\mathbb{R}} p(s, x; r, dz) p(r, z; t, \underline{I})$$

(X_t) è di Markov rispetto a $(\mathcal{F}_t)$

se 1. X_t è adattato alla filtrazione

2. esiste una famiglia $(p(s, x; t, \underline{I}))$ tale che

2a: boreliano in (s, x, t)

2b: è una prob. in $\underline{I}$

2c: $p(s, x; s, \underline{I}) = \delta_x(\underline{I}) = \mathbb{1}_{\underline{I}}(x)$

2d: Chapman - Kolmogorov

3. $\mathbb{P}(X_t \in \underline{I} \mid \mathcal{F}_s) = p(s, X_s; t, \underline{I})$

$$\{p(s, x, t, I)\}, \quad \mathbb{P}(X_0 \in I) =: \mu(I)$$

$$(X_t) \quad \{\mathcal{F}_t\}$$

$$\{p(s, x, t, I)\}$$

punto di vista analitico