Appunti del corso Processi stocastici

Marco Frego,
Marco Pizzato,
Luca Tasin,
Luciano Tubaro

anno accademico 2007-2008

Indice

1 Introduzione ai Processi Stocastici **5**
1 . . . 5
2 . . . 5
3 . . . 5
4 . . . 5
5 . . . 5

2 Processi Stocastici **7**
1 Processi Gaussiani . . . 7
2 Processi di Markov . . . 8
3 Relazione di Chapman-Kolmogorov per Processi di Markov . . . 9
4 Processo di Wiener . . . 9
5 Brownian Bridge . . . 9
6 Martingale . . . 9

3 Equazioni Differeziali Stocastiche **11**
1 . . . 11
2 . . . 11
3 . . . 11

4 Semigruppo e Integrale **13**
1 . . . 13
2 . . . 13
3 . . . 13
4 . . . 13

Capitolo 1

Introduzione ai Processi Stocastici

1

2

3

4

5

Capitolo 2

Processi Stocastici

1 Processi Gaussiani

I *Processi Stocastici Gaussiani* sono caratterizzati dalla proprietà che tutte le misure finito dimensionali $\mu \in \mathscr{M}$ sono distribuzioni normali, in cui è tradizione indicare la media con la funzione $m(t) := \mathbb{E}(X_t)$ e la funzione di covarianza con $\varphi(s,t) := \mathbb{E}((X_t - m(t))(X_s - m(s)))$. Dunque secondo questa definizione, l'n-esima misura finito dimensionale si scrive così:

$$\mu_{t_1,\dots,t_n}(B) := \int_B \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\det(A)}}\, e^{-\frac{1}{2}\langle A^{-1}(x-m_{t_1,\dots,t_n}),x-m_{t_1,\dots,t_n}\rangle}\, dx$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$, $m_{t_1,\dots,t_n} = (m(t_1),\dots,m(t_n))$, $A = a_{ij} = \varphi(t_i,t_j)\ \forall i,j = 1\dots n$.
La matrice di covarianza A deve avere rango massimo in questa notazione, altrimenti non risulterebbe invertibile. Per evitare questo problema si preferisce usare la funzione caratteristica

$$\phi_{t_1,\dots,t_n}(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\boldsymbol{i}\langle z,x\rangle\, \mu_{t_1,\dots,t_n}} dx = e^{\boldsymbol{i}\langle m_{t_1,\dots,t_n},z\rangle - \frac{1}{2}\langle Az,z\rangle}$$

In questa maniera non si ha più la dipendenza da A^{-1} e non serve dunque richiedere che sia non degenere.

Esempio 1. *Calcolare* $\mathbb{E}((X_t - X_s)^2)$.

Soluzione. Risulta

$$\boxed{\mathbb{E}((X_t - X_s)^2) = \varphi(t,t) - 2\varphi(s,t) + (m(t) - m(s))^2.}$$

Infatti

$$(X_t - X_s)^2 = (X_t - m(t) + m(t) - (X_s - m(s)) - m(s))^2$$

chiamando $Y_t = X_t - m(t), Y_s = X_s - m(s)$ e sostituendo si ricava

$$(Y_t - Y_s + m(t) - m(s))^2 = (Y_t - Y_s)^2 + 2(m(t) - m(s))(Y_t - Y_s) + (m(t) - m(s))^2$$

Ora, poichè

$$\mathbb{E}(Y_t - Y_s) = \mathbb{E}(Y_t) - \mathbb{E}(Y_s) = m(t) - m(t) - m(s) + m(s) = 0$$

rimane solamente

$$\mathbb{E}((X_t - X_s)^2) = \mathbb{E}((Y_t - Y_s)^2) + 0 + (m(t) - m(s))^2 =$$

$$\mathbb{E}(Y_t^2 - 2Y_tY_s + X_s^2) + (m(t) - m(s))^2 = \varphi(t,t) - 2\varphi(s,t) + (m(t) - m(s))^2.$$

2 Processi di Markov

Definizione 2.1. *Un processo di Markov è un processo stocastico (X_t) e una famiglia di probabilità di transizione $p(s,x;t,I)$ tali che siano verificate le seguenti condizioni:*

1. $(s,x,t) \to p(s,x;t,I)$ *sia una funzione misurabile,*
2. $I \to p(s,x;t,I)$ *sia una misura di probabilità,*
3. *valga la seguente relazione di Chapman-Kolmogorov*

$$p(s,x;t,I) = \int_{\mathbb{R}} p(s,x;r,dz)\, p(r,z;t,I),$$

4. $p(s,x;s,I) = \delta_x(I)$
5. $\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_I(X_t)|\mathscr{F}_s\right) = p(s,X_s;t,I) \ \ (= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_I(X_t)|X_s\right))$, *ove* $\mathscr{F}_t = \sigma\{X_u : u \leq t\}$.

img07.pdf

Figura 2.1: Proprietà di transizione

L'ultima proprietà della definizione è sostanzialmente equivalente alla nota condizione $\mathbb{P}(X_t \in I | X_s = x, X_{s_1} = x_1, \ldots, X_{s_n} = x_n) = \mathbb{P}(X_t \in I | X_s = x)$ che il lettore troverà più consueta.

5. $\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_I(X_t)|\mathscr{F}_s\right) = \boxed{\mathbb{P}\left(X_t \in I)|\mathscr{F}_s\right) = \mathbb{P}\left(X_t \in I)|X_s\right)} = p(s,X_s;t,I) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_I(X_t)|X_s\right)$

Si può inoltre notare come nella definizione di processo di Markov non sia considerata la famiglia $\mathscr{M}$ di misure finito-dimensionali, che caratterizza (per il primo teorema di Kolmogorov) il processo stocastico. Vediamo quindi, a titolo esplicativo, come sia possibile sfruttare la conoscenza delle probabilità di transizione per ricavare $\mathscr{M}$.

$$\mu_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(I_1 \times \cdots \times I_n) =$$

$$= \mathbb{P}\left((X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in I_1 \times \cdots \times I_n\right)$$

$$= \mathbb{P}\Big((X_{t_1}, \ldots, X_{t_{n-1}}) \in I_1 \times \cdots \times I_{n-1}, X_{t_n} \in I_n\Big)$$

$$= \int\limits_{I_1 \times \cdots \times I_{n-1}} \mathbb{P}(X_{t_n} \in I_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \ldots, X_{t_1} = x_1)\mathbb{P}(X_{t_1} \in dx_1, \ldots, X_{t_{n-1}} \in dx_{n-1})$$

$$= \int\limits_{I_1 \times \cdots \times I_{n-1}} p(t_{n-1}, x_{n-1}; t_n, I_n)\mathbb{P}(X_{t_1} \in dx_1, \ldots, X_{t_{n-1}} \in dx_{n-1})$$

$$= \int\limits_{I_1 \times \cdots \times I_{n-1}} p(t_{n-1}, x_{n-1}; t_n, I_n)p(t_{n-2}, x_{n-2}; t_{n-1}, dx_{n-1})\mathbb{P}(X_{t_1} \in dx_1, \ldots, X_{t_{n-2}} \in dx_{n-2})$$

Reiterando lo stesso procedimento otteniamo alla fine la seguente espressione:

$$\mu_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(I_1 \times \cdots \times I_n) =$$

$$= \int_R \int_I \mathbb{P}(X_0 \in dx_0)p(0, x_0; t_1, dx_1)p(t_1, x_1; t_2, dx_2) \ldots p(t_{n-1}, x_{n-1}; t_n, I_n)$$

$$= \int_R \int_{I \times I_n} \mathbb{P}(X_0 \in dx_0)p(0, x_0; t_1, dx_1)p(t_1, x_1; t_2, dx_2) \ldots p(t_{n-1}, x_{n-1}; t_n, dx_n)$$

ove $I = I_1 \times \cdots \times I_{n-1}$ e $\mathbb{P}(X_0 \in dx_0)$ è la distribuzione iniziale.

3 Relazione di Chapman-Kolmogorov per Processi di Markov

4 Processo di Wiener

5 Brownian Bridge

6 Martingale

Capitolo 3

Equazioni Differeziali Stocastiche

1

2

3

Capitolo 4

Semigruppo e Integrale

1

2

3

4

Bibliografia

[1] **P. Baldi**, Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni, Pitagora Editrice

[2] **I. Karatzas, S.E. Shreve**, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer Verlag

[3] **W. Feller**, Introduction to probability theory and its applications, vol.1, Wiley

[4] **W. Feller**, Introduction to probability theory and its applications, vol.2, Wiley

Indice analitico

funzione di covarianza, 7

processo stocastico
di Markov, 8
gaussiano, 7

relazione di Chapman - Kolmogorov, 8