**Processi di Markov.** Il processo stocastico $(X_t)$ è un processo di Markov rispetto alla filtrazione $(\mathscr{F}_t)$ se
1. $X_t$ è adattato alla filtrazione
2. $\mathbb{P}(X_t \in I \mid \mathscr{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in I \mid X_s)$.

---

$\mathbb{P}(X_t \in I \mid X_s) = \varphi_{s,t,I}(X_s)$
$\varphi_{s,t,I}(x) = \mathbb{P}(X_t \in I \mid X_s = x) = p(s,x;t,I)$

---

Il processo stocastico $(X_t)$ è un processo di Markov rispetto alla filtrazione $(\mathscr{F}_t)$ se
1. $X_t$ è adattato alla filtrazione
2. esiste una famiglia di $\{p(s,x;t,I)\}$ tali che
2a. fissato $I$ allora $(s,x,t) \to p(s,x;t,I)$ è boreliana
2b. fissato $(s,x,t)$ allora $I \to p(s,x;t,I)$ è una misura di probabilità
2c. $p(s,x;s,I) = \delta_x(I) = \mathbb{I}_I(x)$
2d. vale Chapman-Kolmogorov

$$p(s,x,t,I) = \int_{\mathbb{R}} p(s,x;r,dz)\, p(r,z;t,I) \qquad s < r < t$$

3. $\mathbb{P}(X_t \in I \mid \mathscr{F}_s) = p(s, X_s, t, I)$.

---

Definiamo per ogni $\varphi$ boreliana e limitata di $\mathbb{R}$ $\{\varphi \in \mathscr{B}_\mathrm{b}\}$

$$U_{s,t}\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, p(s,x;t,\mathtt{d}y)$$

$U$ risulta un operatore lineare da $\mathscr{B}_\mathrm{b}$ in $\mathscr{B}_\mathrm{b}$ e per la relazione di Chapman-Kolmogorov con $s < r < t$ risulta anche

$$U_{s,t} = U_{s,r}U_{r,t} \qquad \text{e} \qquad U_{s,s} = I$$

---

Nel caso in cui sussiste l'omogeneità nel tempo $(p(s,x;t,I) = p(0,x;t-s,I) = p_{t-s}(x,I))$ allora possiamo definire

$$U_t\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, p_t(x,\mathtt{d}y)$$

con $U_{s+t} = U_sU_t = U_tU_s$ e $U_0 = I$.

---

Consideriamo i rapporti incrementali (in $s$) per $h>0$

$$-\frac{U_{s-h,t}-U_{s,t}}{h}=-\frac{U_{s-h,s}-I}{h}U_{s,t}, \qquad \frac{U_{s+h,t}-U_{s,t}}{h}=-\frac{U_{s,s+h}-I}{h}U_{s+h,t}$$

e supponendo che convergano allo stesso limite potremo definire l'operatore (lineare)

$$A(s)=\lim_{h\to 0}\frac{U_{s-h,s}-I}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{U_{s,s+h}-I}{h}$$

definito su un sottospazio lineare $\mathscr{D}_s$ di $\mathscr{B}_{\mathrm{b}}$. In tal caso avremmo anche

$$\frac{\partial U_{s,t}}{\partial s}=-A(s)\,U_{s,t} \qquad \textit{backward Kolmogorov equation}$$

---

Nel caso omogeneo $A$ non dipende da $s$ e risulta

$$\frac{\partial U_t}{\partial t}=A\,U_t$$

---

Sia $\mathscr{M}$ lo spazio delle misure (finite) su $\mathbb{R}$; definiamo per $\mu\in\mathscr{M}$ l'operatore

$$V_{t,s}\mu(I)=\int_{\mathbb{R}}p(s,x;t,I)\,\mu(\mathtt{d}x)$$

$V_{t,s}$ risulta un operatore lineare da $\mathscr{M}$ in $\mathscr{M}$ con la proprietà (per Chapman-Kolmogorov)

$$V_{t,s}=V_{t,r}V_{r,s}, \qquad V_{t,t}=I$$

---

Nel caso omogeneo abbiamo

$$V_t\mu(I)=\int_{\mathbb{R}}p_t(x,I)\,\mu(\mathtt{d}x)$$

$V_t$ risulta un operatore lineare da $\mathscr{M}$ in $\mathscr{M}$ con la proprietà

$$V_{t+s}=V_tV_s=V_sV_t, \qquad V_0=I$$

---

Anche in questo caso possiamo considerare i rapporti incrementali in $t$ per $h>0$

$$-\frac{V_{t-h,s}-V_{t,s}}{h}=\frac{V(t,t-h)-I}{h}V(t-h,s), \qquad \frac{V_{t+h,s}-V_{t,s}}{h}=\frac{V_{t+h,t}-I}{h}V_{t,s}$$

e supponendo che convergano allo stesso limite potremo definire l'operatore (lineare)

$$B(t) = \lim_{h\to 0} \frac{V(t,t-h) - I}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{V_{t+h,t} - I}{h}$$

definito su un sottospazio lineare $\tilde{\mathscr{D}}_t$ di $\mathscr{M}$. In tal caso avremmo anche

$$\frac{\partial V_{t,s}}{\partial t} = B(t)\, V_{t,s} \qquad \textit{forward Kolmogorov equation}$$

nota anche come equazione di Fokker-Planck.

---

Nel caso omogeneo $B$ non dipende da $t$ e risulta

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = B\, V_t$$

---

Possiamo considerare la forma bilineare definita su $\mathscr{B}_{\mathrm{b}} \times \mathscr{M}$

$$\langle \varphi, \mu \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, \mu(\mathtt{d}x)$$

Risulta

$$\langle U_{s,t}\varphi, \mu \rangle = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\; p(s,x;t,\mathtt{d}y)\, \mu(\mathtt{d}x) = \langle \varphi, V_{t,s}\mu \rangle$$

Rispetto a questa forma bilineare abbiamo $U^*_{s,t} = V_{t,s}$ e $A(t)^* = B(t)$ (ed anche $U_{s,t} = V^*_{t,s}$ e $A(t) = B(t)^*$), e nel caso omogeneo

$$U^*_t = V_t; \quad A^* = B \qquad U_t = V^*_t; \quad A = B^*.$$

---

Formalmente possiamo scrivere la "*backward Kolmogorov equation*" come

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\; \frac{\partial}{\partial s} p(s,x;t,\mathtt{d}y) = -A(s) \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\; p(s,x;t,\mathtt{d}y) = -\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\; A(s)p(s,\cdot;t,\mathtt{d}y)(x)$$

e quindi (scegliendo $\varphi = \mathbb{I}_I$)

$$\frac{\partial}{\partial s} p(s,x;t,I) = -A(s)p(s,\cdot;t,I)(x)$$

cioè $p(s,x,t,I)$ nelle variabili $s,x$ è soluzione della "*backward Kolmogorov equation*". In modo analogo si può verificare che la stessa $p(s,x,t,I)$ ma nelle variabili $t,I$ verifica l'equazione di Fokker-Planck.

Nel caso di Wiener dove

$$p(s,x;t,I) = \int_I \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}} \, dy$$

si verifica facilmente che $A = B = \frac{1}{2}D^2$ dove $D^2$ indica l'operatore derivata seconda.