Primo teorema di convergenza *Sia $f \in L^2(0, 2\pi)$ tale che*

$$\int_0^{2\pi} f(\xi)\, d\xi = 0$$

e consideriamo una sua primitiva

$$F(x) = c + \int_0^x f(\xi)\, d\xi$$

che risulta una funzione continua (in $[0, 2\pi]$) con $F(0) = F(2\pi)$ (in altre parole la sua estensione periodica è una funzione continua). Allora la serie di Fourier associata ad F converge uniformemente a F.

Siano $\alpha_k, \beta_k,\ \ k \geq 1$, i coefficienti di Fourier di f. Risulta che

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) < \infty$$

Calcoliamo i coefficienti relativi a F: risulta per $k \geq 1$

$$a_k = -\frac{\beta_k}{k}, \qquad b_k = \frac{\alpha_k}{k}$$

usando un'integrazione per parti. Considerando la successione delle ridotte $s_n(x)$

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

abbiamo

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| = \Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big| \leq$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k}\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$$

quindi

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k}\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \leq \Big(\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2 + \beta_k^2 \Big)^{1/2}$$

e quindi abbiamo la convergenza uniforme a F.

Nota. Il coefficiente a_0 è dato da

$$a_0 = 2c - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\, f(x)\, dx$$

Consideriamo la funzione

$$h(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

per $0 < x < 2\pi$ e $h(0) = h(2\pi) = 0$. Denotiamo con $s_n(x)$ le somme parziali corrispondenti alla serie di Fourier associata a $h(x)$:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$$

Introduciamo la funzione

$$f(x) = \big(1 - \cos(x)\big)\; h(x)$$

i cui coefficienti di Fourier sono

$$\begin{aligned} a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\; dx &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(x)\cos(x)\;\cos(kx)\; dx = \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x)[\cos((k+1)x) + \cos((k-1)x)]\; dx = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\; dx &= \frac{1}{k} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(x)\cos(x)\;\sin(kx)\; dx = \\ &= \frac{1}{k} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x)[\sin((k+1)x) + \sin((k-1)x)]\; dx = \end{aligned}$$

da cui

$$b_1 = \frac{3}{4}, \qquad b_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k-1}\Big) = -\frac{1}{k(k^2-1)}$$

Possiamo applicare il teorema precedente ed ottenere

$$f(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k(k^2-1)}$$

dove la serie converge uniformemente. D'altra parte si vede direttamente che la serie converge uniformemente.

D'altra parte

$$
\begin{aligned}
\big(1-\cos(x)\big)\ s_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)\cos(x)}{k}= \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}-\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin((k+1)x)}{k}+\sum_{k=2}^{n}\frac{\sin((k-1)x)}{k}\Big)= \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}-\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=2}^{n+1}\frac{\sin(kx)}{k-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin(kx)}{k+1}\Big)
\end{aligned}
$$

che si può convenientemente scrivere come

$$
\big(1-\cos(x)\big)\ s_n(x)=\frac{3}{4}\sin(x)-\sum_{k=2}^{n}\frac{\sin(kx)}{k(k^2-1)}-\frac{\sin((n+1)x)}{2n}+\frac{\sin(nx)}{2(n+1)}
$$

da cui si deduce che

$$
\big(1-\cos(x)\big)\ s_n(x)\longrightarrow f(x)
$$

uniformemente. Quindi in ogni intervallo $[\delta,2\pi-\delta]$ si ha

$$
(1-\cos(\delta))|s_n(x)-h(x)|\le\Big|\big(1-\cos(x)\big)\ s_n(x)-f(x)\Big|
$$

da cui la convergenza uniforme di $s_n(x)$ a $h(x)$ nell'intervallo $[\delta,2\pi-\delta]$. Infine si ha anche che $s_n(0)\to h(0)=0$ e $s_n(2\pi)\to h(\pi)=0$.

Sia ora $F(x)$ una funzione continua a tratti in $[0,2\pi]$ con $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m$ i punti di discontinuità con $F(x_i)=\frac{F(x_i^+)+F(x_i^-)}{2}$. Consideriamo la funzione

$$
F(x)-\sum_{i=1}^{m}\frac{F(x_i^+)-F(x_i^-)}{\pi}h(x-x_i)
$$

essa è continua dappertutto e per il teorema precedente la sua serie di Fourier converge uniformemente. Quindi la serie di Fourier di $F(x)$ converge uniformemente in ogni chiuso che non contiene i punti di discontinuità.