Calcolo differenziale e integrale
(funzioni di una variabile reale)

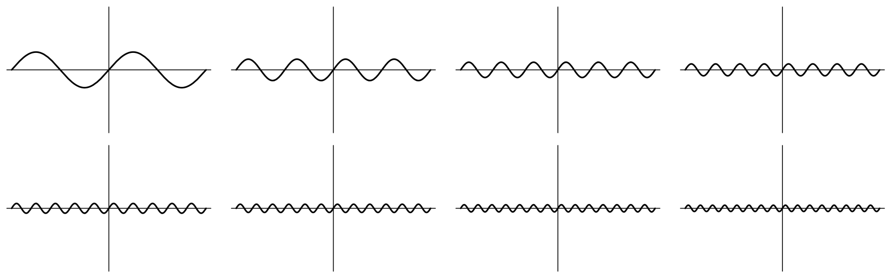
Gabriele H. Greco
Dipartimento di Matematica
Università di Trento
38050 POVO (Trento) Italia

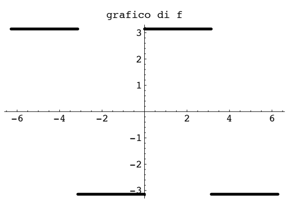
www.science.unitn.it/-greco

a.a. 2005-06: Appunti del corso di Analisi Matematica (1UD, 2UD)

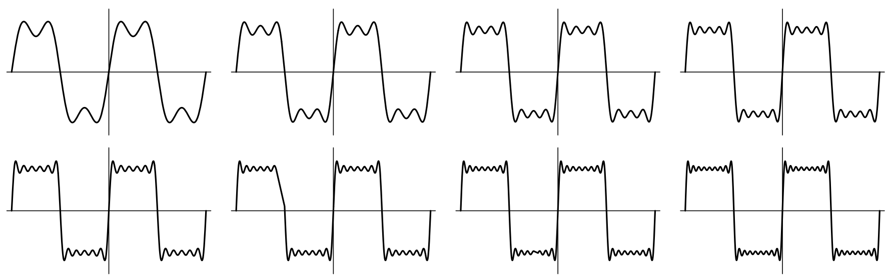
Cap. 10 — Serie di Fourier 1-7

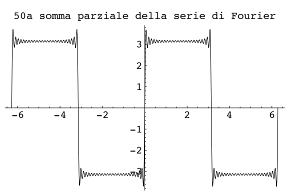
La funzione f è 2π-periodica; vale π su $0 \vdash\!\dashv \pi$ e $-\pi$ su $(-\pi) - 0$.





Le prime 8 armoniche di ordine pari di f. Notare la loro ampiezza che diventa via via più piccola.





Le prime 8 somme parziali di ordine pari della serie di Fourier di f

1 Funzioni periodiche, pari e dispari

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Un numero reale T si dice **periodo** di f se

(1) $$f[x+T] = f[x] \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Una funzione f è detta **periodica**, se ha un periodo T che non è nullo; in tal caso la funzione f è detta T**-periodica**; e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ anche

(2) le funzioni $x \mapsto f[x+\alpha]$, $x \mapsto f[x]+\alpha$, $x \mapsto \alpha f[x]$ sono T-periodiche; mentre

(3) la funzione $x \mapsto f[\alpha x]$ ha periodo $\frac{T}{\alpha}$, per $\alpha \neq 0$.

Le funzioni trigonometriche 'cos' e 'sin' sono le piu' importanti funzioni periodiche; esse sono 2π-periodiche. Anche le funzioni del tipo

(4) $$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos[nx] + b_n \sin[nx])$$

dove $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, sono 2π-periodiche; sono dette **polinomi trigonometrici**.

L'integrale di una funzione periodica su un intervallo di ampiezza pari al periodo, non dipende dall'intervallo. Infatti

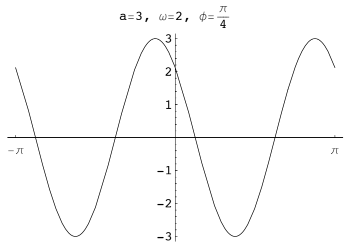
Lemma 1 *Se f è T-periodica, integrabile sull'intervallo $0 \longmapsto T$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha:*

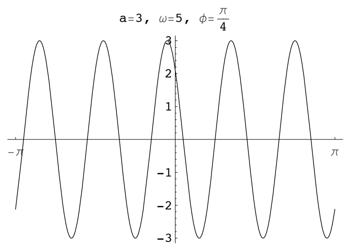
(5) $$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx.$$

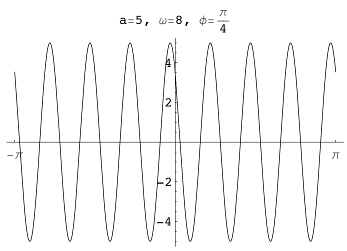
Dimostrazione. Dall'additività dell'integrale e dalla periodicità di f abbiamo che f è integrabile su ogni intervallo limitato. Inoltre $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$. Queste uguaglianze combinate con le seguenti

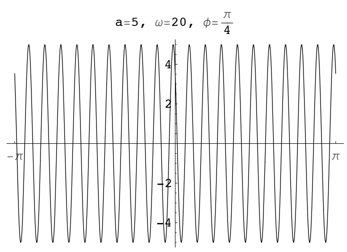
$(*)$ $$\int_a^0 f(x)dx = \int_a^0 f(x+T)dx = \int_{a+T}^T f(t)dt,$$

danno (5). Nota che la prima uguaglianza di $(*)$ è conseguenza della periodicità; mentre con il cambiamento di variabile $x + T \overset{s}{=} t$ si ottiene la seconda. □









Esercizio 1 *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è detta* **sinusoidale**, *se $\exists\, a, \omega, \phi \in \mathbb{R}$ tali che*

$$f[x] := a\cos[\omega x + \phi] \quad \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

con ampiezza $a \geq 0$, frequenza $\omega > 0$ *e* fase iniziale $\phi \in 0 \vdash\!\!- (2\pi)$. [1] *Si osservi che*

(6) *per $\omega \in \mathbb{R}_{++}$, le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{y} \overset{eq}{=} -\omega^2 y$ sono le funzioni sinusoidali che hanno frequenza ω;* [2]

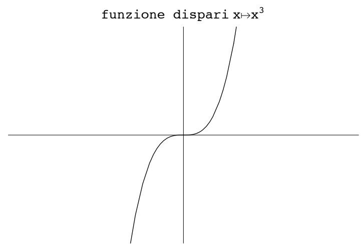
(7) *qualunque siano $n \in \mathbb{N}_1$, $a_n, b_n, a, \phi \in \mathbb{R}$, le funzioni $x \mapsto a_n \cos[nx] + b_n \sin[nx]$ e le funzioni $x \mapsto a\sin[\omega x + \phi]$ sono sinusoidali; le prime hanno frequenza n e ampiezza $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, le seconde hanno ampiezza $|a|$ e frequenza $|\omega|$.*

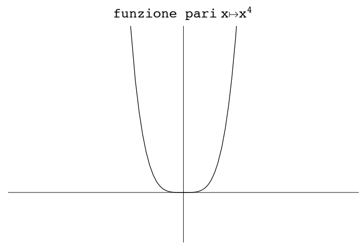
(8) *le funzioni sinusoidali con una stessa frequenza formano uno spazio vettoriale (in altri termini, per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, le combinazioni lineari di funzioni sinusoidali con frequenza ω sono sinusoidali con la stessa frequenza).*

---

[1] Usiamo impropriamente il termine "frequenza", che per i fisici è il rapporto $\frac{\omega}{2\pi}$.

[2] *Suggerimento per la dim.* Primo, si osservi che mediante il cambiamento di variabile $x \overset{s}{=} \omega t$ (o cambio di scala $x \overset{s}{=} \omega x$) si passa dalle soluzioni di $\ddot{y} \overset{eq}{=} -y$ a quelle di $\ddot{y} \overset{eq}{=} -\omega^2 y$. Secondo, ci si ricordi delle soluzioni di $\ddot{y} \overset{eq}{=} -y$.





Una funzione f è detta **pari**, se $f[-x] = f[x]$; per esempio, i coseni cos, cosh, le potenze $x \mapsto x^n$ ad esponente intero pari e le loro serie sono funzioni pari.

Una funzione f è detta **dispari**, se $f[-x] = -f[x]$; per esempio, i seni sin, sinh, le potenze $x \mapsto x^n$ ad esponente intero dispari e le loro serie sono funzioni dispari.

Ogni funzione f è somma di una funzione dispari e di una pari. Infatti

$$x \mapsto \frac{f[x] + f[-x]}{2} \quad \text{e} \quad x \mapsto \frac{f[x] - f[-x]}{2} \tag{9}$$

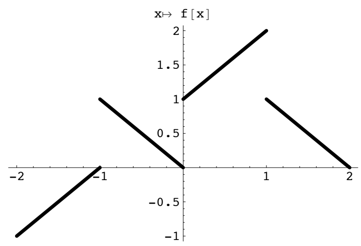
sono, rispettivamente pari e dispari; la loro somma è f.

La somma di funzioni pari (risp. dispari) è pari (risp. dispari). Il prodotto di due funzioni, entrambe dispari o entrambe pari, è pari. Invece, il prodotto di una funzione pari per una dispari è dispari.

Lemma 2 *Sia f una funzione integrabile nell'intervallo $(-a) \vdash\!\dashv a \subset \mathbb{R}$. Allora*

(10) $\int_{-a}^{a} f[x]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f[x]\,\mathrm{d}x$*, se f è pari;*

(11) $\int_{-a}^{a} f[x]\,\mathrm{d}x = 0$*, se f è dispari.*

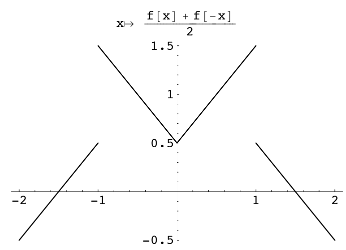


Dimostrazione. Mediante la sostituzione $x \overset{s}{=} -t$, si ha che $\int_{-a}^{0} f[x]\,\mathrm{d}x = \int_0^a f[-t]\,\mathrm{d}t$. Dunque $\int_{-a}^{a} f[x]\,\mathrm{d}x = \int_0^a f[x]\,\mathrm{d}x + \int_0^a f[-t]\,\mathrm{d}t$. Da cui seguono (10) e (11). □

Esercizio 2 (Sul gruppo additivo dei periodi) *Sia $\mathcal{P}$ l'insieme dei periodi di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si osservi che $\mathcal{P}$ non è vuoto, perchè $0 \in \mathcal{P}$.* [3] *Inoltre*

(12) $\mathcal{P}(f) = \mathbb{R}$ *se e solo se f è costante;*

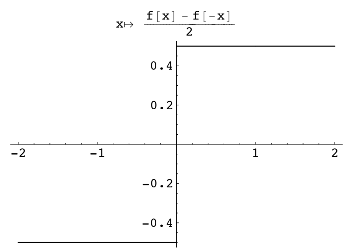
(13) $T_1 - T_2 \in \mathcal{P}$*, se $T_1, T_2 \in \mathcal{P}$;* [4]



(14) $\mathcal{P} = \mathbb{Q}$*, se f è la funzione di Dirichlet.*

(15) **(esistenza del periodo minimo)** *Se f è periodica, continua in almeno un punto e non è costante, allora esiste $\min(\mathcal{P} \cap \mathbb{R}_{++})$, cioè tra i periodi positivi di f ve n'è uno che è il più piccolo. Inoltre, se τ è questo periodo più piccolo, si ha che $\mathcal{P} = \{n\tau : n \in \mathbb{Z}\}$, cioè ogni altro periodo di f è un multiplo intero di τ.*

Dim. per assurdo della prima parte di (15). Sia $\bar{x}$ un punto di continuità di f. Si fissi $\varepsilon \in \mathbb{R}_{++}$. Per continuità, esiste $\delta \in \mathbb{R}_{++}$ tale che



$$|f[x] - f[\bar{x}]| < \varepsilon \text{ per ogni } x \in (\bar{x} - \delta) \vdash\!\dashv (\bar{x} + \delta). \tag{$a*$}$$

Supponiamo per assurdo che non esista un periodo minimo tra i periodi positivi e non nulli di f. Allora ci saranno almeno due periodi T_1, T_2 tali che che $0 < T_1 - T_2 < \delta$. Quindi, posto $T^* := T_1 - T_2$, da $(a*)$ segue:

$$|f[x] - f[\bar{x}]| < \varepsilon \text{ per ogni } x \in (\bar{x} - T^*) \vdash\!\dashv (\bar{x} + T^*). \tag{$b*$}$$

Grazie a (13), T^* è un periodo di f; dunque da $(b*)$ si ha

$$|f[x] - f[\bar{x}]| < \varepsilon \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}. \tag{$c*$}$$

Dunque, essendo ε arbitrario, si ha che

$$f[x] = f[\bar{x}] \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}, \tag{$d*$}$$

in contraddizione con l'ipotesi che asserisce che f non è costante. □

[3] Nel caso che oltre a 0 non vi sia altro periodo, la funzione f è detta **aperiodica**.

[4] Sia $G \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto tale che "$a - b \in G$ per ogni $a, b \in G$". Si costruisca una funzione f tale che si abbia $\mathcal{P} = G$!

2 Convergenza delle serie di Fourier (enunciato)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile sull'intervallo $(-\pi) \vdash\!\dashv \pi$, definiamo

$$\boxed{a_0 := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f[x]\,\mathrm{d}x}, \quad \boxed{a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f[x]\cos[nx]\,\mathrm{d}x}, \quad \boxed{b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f[x]\sin[nx]\,\mathrm{d}x}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}_1$. Questi numeri a_n e b_n sono detti **coefficienti di Fourier** della funzione f, relativamente all'intervallo $(-\pi) \vdash\!\dashv \pi$. La serie trigonometrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos[nx] + b_n \sin[nx]\Big) \tag{1}$$

è detta **serie di Fourier** di f. La funzione $S_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$S_n[x] := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k \cos[kx] + b_k \sin[kx]\Big) \tag{2}$$

è una **somma parziale** della serie di Fourier.

Teorema 1 (Convergenza puntuale della serie di Fourier) *Se f è 2π-periodica e derivabile a tratti, allora, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha* [5]

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos[nx] + b_n \sin[nx]\Big) = \frac{f[x+] + f[x-]}{2}. \tag{3}$$

Chiariamo i termini non definiti. Con $f[x+]$ e $f[x-]$ denotiamo, rispettivamente, il **limite destro** ed il **limite sinistro** di f in x; in altre parole:

$$f[x+] := \lim_{t\to x^+} f[t] \qquad e \qquad f[x-] := \lim_{t\to x^-} f[t]. \tag{4}$$

Una funzione g è detta **derivabile a tratti** su un intervallo chiuso limitato $a \vdash\!\dashv b \subset \mathrm{dom}g$, se esiste un sottoinsieme finito $D \subset a \vdash\!\dashv b$ tale che

(5) g è derivabile in ogni $x \in a \vdash\!\dashv b \setminus D$ e esistono e sono finiti i limiti

- (a) $g[x+]$ e $\lim_{y\to 0+} \frac{g[x+y]-g[x+]}{y}$ per ogni $x \in D \cap a \vdash\!\!- b$
- (b) $g[x-]$ e $\lim_{y\to 0-} \frac{g[x+y]-g[x-]}{y}$ per ogni $x \in D \cap a -\!\!\dashv b$.

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è 2π-periodica, è detta *derivabile a tratti*, se lo è sull'intervallo $(-\pi) \vdash\!\dashv \pi$. La dervabilità a tratti ci garantisce (tramite la conseguente "continuità a tratti"[6]) l'integrabilità di f e quindi il calcolo dei coefficienti di Fourier.

Si tenga ben in mente che per una funzione derivabile a tratti

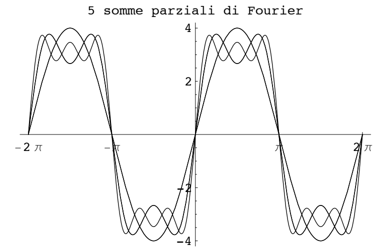
(6) i coefficienti a_n, b_n e le medie $\frac{f[x+]-f[x-]}{2}$ non cambiano e la derivabilità a tratti non viene a meno, qualora si modifichi la funzione in un numero finito di punti.

---

[5] Il teorema vale anche quando f ha un generico periodo T (il lettore lo dimostri mediante la sostituzione $x \overset{s}{=} (T/2\pi)x$). In tal caso la (3) diventa $\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos[n\frac{2\pi}{T}x] + B_n \sin[n\frac{2\pi}{T}x]) = \frac{f[x+]+f[x-]}{2}$, dove i coefficienti sono definiti da $A_n := \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f[x]\cos[n\frac{2\pi}{T}x]\,\mathrm{d}x$ e $B_n := \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f[x]\sin[n\frac{2\pi}{T}x]\,\mathrm{d}x$. Le funzioni sinusoidali $x \mapsto A_n \cos[n\frac{2\pi}{T}x] + B_n \sin[n\frac{2\pi}{T}x]$ sono le cosiddette *armoniche* di f; la prima tra di esse, detta *armonica fondamentale*, ha periodo T.

[6] g è detta **continua a tratti** su un intervallo chiuso limitato $a \vdash\!\dashv b \subset \mathrm{dom}g$, se in ogni $x \in a -\!\!\dashv b$ (risp. in ogni $x \in a \vdash\!\!- b$) esiste finito il limite sinistro (risp. destro) e, esclusi al più un numero finito di punti, tali limiti destro e sinistro coincidono.

3 Convergenza delle serie di Fourier (esempi)



Esercizio 3 *Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodica, definita sull'intervallo $(-\pi) \vdash\!\dashv \pi$ da*

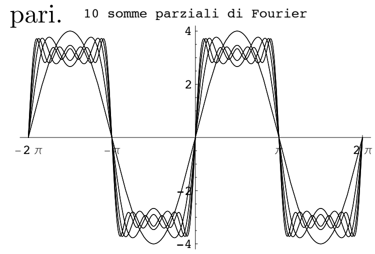
(1)
$$f[x] := \begin{cases} \pi & \textit{per } x \in 0 \vdash\!\dashv \pi \\ -\pi & \textit{per } x \in (-\pi) \vdash 0. \end{cases}$$

E servirsi dello sviluppo per dimostrare che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Soluzione. Osservato che $\underline{\underline{f \text{ è dispari}}}$, abbiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}_1$, $a_0 = a_n = 0$ e

$\boxed{\cos[n\pi] = (-1)^n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}}$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \pi \sin[nx]\,\mathrm{d}x = 2\frac{-\cos[nx]}{n}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n}(1-\cos[n\pi]) = \frac{2(1-(-1)^n)}{n} = \begin{cases} \frac{4}{n} & \text{per } n \text{ dispari} \\ 0 & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases}$$



Essendo f derivabile a tratti, dal teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier segue che

(*)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2n-1}\sin[(2n-1)x] = \begin{cases} 0 & \text{per } x \in \pi\mathbb{Z} \\ f[x] & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

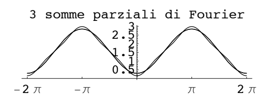
Perciò, essendo $\boxed{\sin[(2n+1)\frac{\pi}{2}] = (-1)^n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}}$,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}f[\frac{\pi}{2}] = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2n-1}\sin[(2n-1)\frac{\pi}{2}] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin[(2n+1)\frac{\pi}{2}]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}. \square$$

Esercizio 4 *Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodica, definita sull'intervallo $(-\pi) \vdash\!\dashv \pi$ da $f[x] := |x|$. E servirsi dello sviluppo per dimostrare che* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

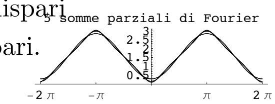
Soluzione. Osservato che $\underline{\underline{f \text{ è pari}}}$, abbiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}_1$, $b_n = 0$ e

(*)
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \pi, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos[nx]\,\mathrm{d}x.$$

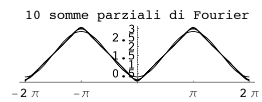


Integrando per parti si ha

$$\int_0^{\pi} x\cos[nx]\,\mathrm{d}x = x\frac{\sin[nx]}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin[nx]}{n}\,\mathrm{d}x = \frac{\cos[nx]}{n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} -\frac{2}{n^2} & \text{per } n \text{ dispari} \\ 0 & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases}$$

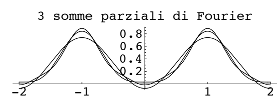


Essendo f derivabile a tratti, dal teorema sulla convergenza delle serie di Fourier segue che



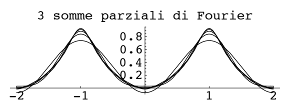
(**)
$$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos[(2n-1)x]}{\pi(2n-1)^2} = f[x], \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Perciò si ha $\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)^2} = f[0] = 0$. Quindi $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$. $\square$



Esercizio 5 *Dimostrare le seguenti uguaglianze:*

(2) $x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos[n\pi x]}{n^2}$ *per* $x \in (-1) \vdash\!\dashv 1$,



(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$,

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. $\square$

4 Coefficienti di Fourier e formule di ortogonalità

Per brevità, denotiamo con $\mathcal{C}_\pm$ l'insieme delle funzioni $g : (-\pi)\mapsto\pi \to \mathbb{R}$ continue a tratti sull'intervallo $(-\pi)\mapsto\pi$. Si definisca il seguente "prodotto scalare" e la correlata "norma" per ogni $f,\, g \in \mathcal{C}_\pm$:

(1) $$\langle\!\langle f, g\rangle\!\rangle := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f[x]g[x]\,\mathrm{d}x \quad \text{ e } \quad \|g\| := \sqrt{\langle\!\langle g, g\rangle\!\rangle}.$$

Lo chiamiamo prodotto scalare, perchè valgono le sequenti tre proprietà qualunque siano $f, g, h \in \mathcal{C}_\pm$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(2) **(positività)** $\langle\!\langle f, f\rangle\!\rangle \geq 0$, [7]

(3) **(simmetria)** $\langle\!\langle f, g\rangle\!\rangle = \langle\!\langle g, f\rangle\!\rangle$,

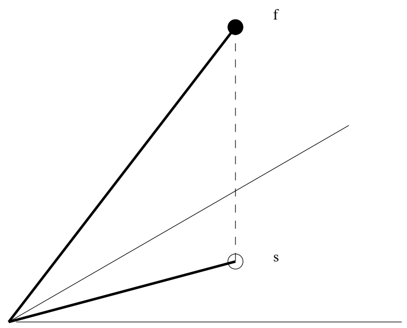
(4) **(bilinearità)** $\begin{cases} (a) & \langle\!\langle \alpha f + \beta h, g\rangle\!\rangle = \alpha\langle\!\langle f, g\rangle\!\rangle + \beta\langle\!\langle h, g\rangle\!\rangle \\ (b) & \langle\!\langle g, \alpha f + \beta h\rangle\!\rangle = \alpha\langle\!\langle g, f\rangle\!\rangle + \beta\langle\!\langle g, h\rangle\!\rangle. \end{cases}$

Una famiglia $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_\pm$ è detta **ortonormale** rispetto a questo "prodotto scalare", se $\|h_n\| = 1$ e $\langle\!\langle h_n, h_m\rangle\!\rangle = 0$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$.

Lemma 3 (ortogonalità delle funzioni trigonometriche). *La famiglia di funzioni, formata dalla funzione costante* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *e dalle funzioni trigonometriche* $x \mapsto \cos[nx]$ *e* $x \mapsto \sin[nx]$, *è ortonormale. Inoltre, per ogni* $f \in \mathcal{C}_\pm$, *si ha:*

(5) $$\frac{a_0}{\sqrt{2}} = \langle\!\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle\!\rangle, \quad a_n = \langle\!\langle f, \cos[n\bullet]\rangle\!\rangle, \quad e \quad b_n = \langle\!\langle f, \sin[n\bullet]\rangle\!\rangle.$$

Dimostrazione. *Sugg.* Calcolare gli integrali con le formule di prostaferesi (v. §6cap6).



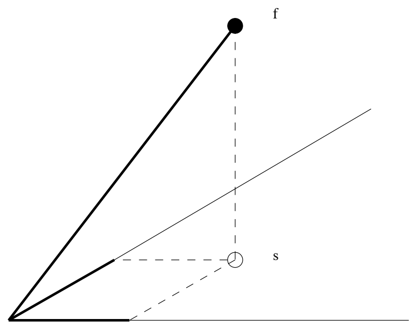
proiezione ortogonale

Proposizione 1 *Sia* $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una famiglia ortonormale e* $f \in \mathcal{C}_\pm$. *Posto* $s_n := \sum_{i=0}^n \langle\!\langle f, h_i\rangle\!\rangle h_i$. *Allora*

(6) **(teorema di Pitagora)** $\|\sum_{i=0}^n \alpha_i h_i\|^2 = \sum_{i=0}^n \alpha_i^2$ *per ogni* $\{\alpha_i\}_{i\in 0..n} \subset \mathbb{R}$,

(7) **(proiezione ortogonale)** $\langle\!\langle f, s_n\rangle\!\rangle = \sum_{i=0}^n \langle\!\langle f, h_i\rangle\!\rangle^2 = \|s_n\|^2 = \|f\|^2 - \|f - s_n\|^2$,

(8) **(disuguaglianza di Bessel)** $\sum_{i=0}^\infty \langle\!\langle f, h_i\rangle\!\rangle^2 \leq \|f\|^2$.



proiezione ortogonale

Dimostrazione. *Verifica di* (6). $\|\sum_{i=0}^n \alpha_i h_i\|^2 = \langle\!\langle \sum_{i=0}^n \alpha_i h_i, \sum_{j=0}^n \alpha_j h_j\rangle\!\rangle = \sum_{i,j=0}^n \langle\!\langle \alpha_i h_i, \alpha_j h_j\rangle\!\rangle = \sum_{i,j=0}^n \alpha_i\alpha_j \langle\!\langle h_i, h_j\rangle\!\rangle = \sum_{s=0}^n \alpha_s\alpha_s \langle\!\langle h_s, h_s\rangle\!\rangle = \sum_{s=0}^n \alpha_s^2 \|h_s\|^2 = \sum_{s=0}^n \alpha_s^2$. *Verifica di* (7). La prima uguaglianza segue dal fatto che $\langle\!\langle f, s_n\rangle\!\rangle = \langle\!\langle f, \sum_{i=0}^n \langle\!\langle f, h_i\rangle\!\rangle h_i\rangle\!\rangle = \sum_{i=0}^n \langle\!\langle f, \langle\!\langle f, h_i\rangle\!\rangle h_i\rangle\!\rangle = \sum_{i=0}^n \langle\!\langle f, h_i\rangle\!\rangle \langle\!\langle f, h_i\rangle\!\rangle = \sum_{i=0}^n \langle\!\langle f, h_i\rangle\!\rangle^2$. Grazie a (6), dalla definizione di s_n segue immediatamente la seconda uguaglianza. Per la terza uguaglianza si osservi che $\|f - s_n\|^2 = \langle\!\langle f - s_n, f - s_n\rangle\!\rangle = \|f\|^2 + \|s_n\|^2 - 2\langle\!\langle f, s_n\rangle\!\rangle = \|f\|^2 + \|s_n\|^2 - 2\|s_n\|^2 = \|f\|^2 - \|s_n\|^2$. *Verifica di* (8). Segue immediatamente da (7). $\square$

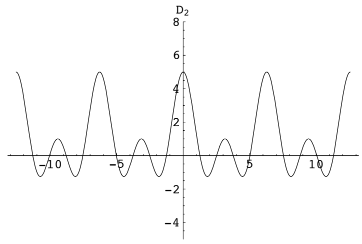
Lemma 4 (disuguaglianza di Bessel per le serie di Fourier). *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua a tratti sull'intervallo* $[-\pi, \pi]$. *Allora*

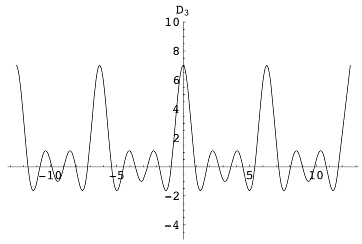
(9) $$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2[x]\,\mathrm{d}x.$$

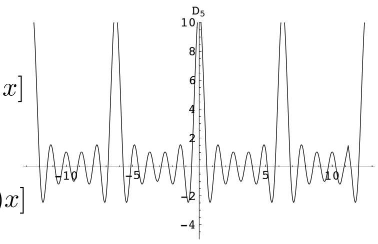
Dimostrazione. Segue immediatamente da (5) e da (8). $\square$

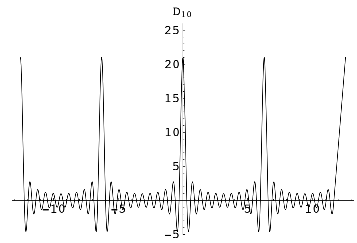
[7] Qualunque sia la funzione $f \in \mathcal{C}_\pm$, si ha "$\|f\| = 0$ se e solo se $\{x \in (-\pi)\mapsto\pi : f(x) \neq 0\}$ è finito". Quindi, ogni funzione che sia continua in ogni punto $(-\pi)\mapsto\pi$ e abbia norma nulla, è nulla.

5 Il nucleo di Dirichlet









Per ogni $n \in \mathbb{N}_1$, la funzione $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, detta **nucleo di Dirichlet**, è definita da:

(1) $$D_n[x] := 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos[kx].$$

Lemma 5 (sul nucleo di Dirichlet). *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica e continua a tratti. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti uguaglianze:*

(2) $\sin\left[\frac{x}{2}\right] D_n[x] = \sin\left[(n+\frac{1}{2})x\right]$,

(3) $\int_0^{\pi} D_n[x]\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} D_n[x]\,\mathrm{d}x = \pi$,

(4) $S_n[x] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f[x+y] D_n[y]\,\mathrm{d}y$.

Dimostrazione. Dimostriamo la (2). $\sin[\frac{x}{2}]D_n[x] = \sin[\frac{x}{2}] + \sum_{k=1}^{n} 2\sin[\frac{x}{2}]\cos[kx]$

$$= \sin[\frac{x}{2}] + \sum_{k=1}^{n}\Big(\sin[\frac{x}{2}+kx] + \sin[\frac{x}{2}-kx]\Big) = \sin[\frac{x}{2}] + \sum_{k=1}^{n}\sin[(k+\frac{1}{2})x] - \sum_{k=1}^{n}\sin[(k-1+\frac{1}{2})x]$$

$$= \sin[\frac{x}{2}] + \sum_{k=1}^{n}\sin[(k+\frac{1}{2})x] - \sum_{k=0}^{n-1}\sin[(k+\frac{1}{2})x] = \sin[\frac{x}{2}] + \sin[(n+\frac{1}{2})x] - \sin[\frac{x}{2}] = \sin[(n+\frac{1}{2})x]$$

Per la dimostrazione della (2) si tenga conto che $\int_0^{\pi}\cos[kx]\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0}\cos[kx]\,\mathrm{d}x = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}_1$. Ora dimostriamo la (3). Esplicitando i coefficienti di Fourier che compaiono in $S_n[x]$ si ha:

$$S_n[x] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f[t]\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f[t]\cos[kt]\cos[kx]\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f[t]\sin[kt]\sin[kx]\,\mathrm{d}t\Big)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f[t]\Big(1+2\sum_{k=1}^{n}\big(\cos[kt]\cos[kx]+\sin[kt]\sin[kx]\big)\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f[t]\Big(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos[kt-kx]\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f[t]D_n[t-x]\,\mathrm{d}t \overset{(\dagger)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f[x+y]D_n[y]\,\mathrm{d}y \overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f[x+y]D_n[y]\,\mathrm{d}y,$$

dove l'uguaglianza contrassegnata con (†), è dovuta al cambiamento di variabile $t-x \overset{s}{=} y$; mentre l'uguaglianza (‡) segue dal lemma 1§1. □

Lemma 6 (infinitesimalità dei coefficienti di Fourier) *Sia f continua a tratti sull'intervallo $(-\pi)\mapsto\pi$. Allora*

(5) $$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f[x]\cos[nx]\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f[x]\sin[nx]\,\mathrm{d}x = 0.$$

Dimostrazione. Poichè $\int_{-\pi}^{\pi} f[x]\,\mathrm{d}x < \infty$, dal lemma 6§4 (disuguaglianza di Bessel) segue la convergenza della serie $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$. Perciò $\lim_{n\to+\infty} a_n^2 = \lim_{n\to+\infty} b_n^2 = \lim_{n\to+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = 0$. □

6 Convergenza delle serie di Fourier (dimostrazione)

Si fissi $x \in \mathbb{R}$. Da (3§5) e (4§5) abbiamo $S_n[x] - \dfrac{f(x+) + f[x-]}{2} =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f[x+y]D_n[y]\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f[x+]D_n[y]\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f[x-]D_n[y]\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \big(f[x+y] - f[x+]\big)D_n[y]\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \big(f[x+y] - f[x-]\big)D_n[y]\,\mathrm{d}y.$$

Per dimostrare la convergenza della serie di Fourier sarà sufficiente verificare che

$$(1*)\quad \lim_n \int_0^{\pi} \big(f[x+y]-f[x+]\big)D_n[y]\,\mathrm{d}y = 0 \text{ e } \lim_n \int_{-\pi}^{0} \big(f[x+y]-f[x-]\big)D_n[y]\,\mathrm{d}y = 0.$$

Iniziamo con il verificare il primo limite. Ricordando la (1§5), abbiamo

$$\int_0^{\pi} \big(f[x+y] - f[x+]\big)D_n[y]\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \big(f[x+y] - f[x+]\big)\frac{\sin\big[(n+\frac{1}{2})y\big]}{\sin[\frac{y}{2}]}\,\mathrm{d}y =$$

$$(2*)\qquad = \int_0^{\pi} \big(f[x+y] - f[x+]\big)\frac{\sin[ny]\cos[\frac{y}{2}] + \cos[ny]\sin[\frac{y}{2}]}{\sin[\frac{y}{2}]}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{f[x+y] - f[x+]}{\sin[\frac{y}{2}]}\cos[\frac{y}{2}]\sin[ny]\,\mathrm{d}y + \int_0^{\pi} \frac{f[x+y] - f[x+]}{\sin[\frac{y}{2}]}\sin[\frac{y}{2}]\cos[ny]\,\mathrm{d}y.$$

Nei due ultimi integrali vi è, come fattore, la funzione $g : (-\pi)\vdash\!\dashv\pi \to \mathbb{R}$ data da

$$(3*)\qquad g(y) := \begin{cases} \frac{f[x+y]-f[x+]}{\sin[\frac{y}{2}]} & \text{se } y \in 0\dashv\pi \\ 0 & \text{se } y \in (-\pi)\vdash\!\dashv 0. \end{cases}$$

Per $y \to 0^+$ abbiamo:

$$(4*)\qquad \lim_{y\to 0^+} g[y] = \lim_{y\to 0^+} 2\frac{f[x+y] - f[x+]}{y},$$

perciò, in virtù della derivabilità a tratti della funzione f, si ha che il limite destro $g[0+]$ esiste ed è finito. Dunque, tenendo conto che f è continua a tratti, ne segue che anche g *è continua a tratti* in $(-\pi)\vdash\!\dashv\pi$ e, di conseguenza, anche la funzione

$$(5*)\qquad x \mapsto g[y]\cos[\frac{y}{2}].$$

Quindi applicando il lemma 6§4 (disuguaglianza di Bessel) a questa funzione, abbiamo

$$(6*)\quad \lim_n \int_0^{\pi} \frac{f(x+y) - f(x+)}{\sin\frac{y}{2}}\cos\frac{y}{2}\sin[ny]\,\mathrm{d}y = \lim_n \int_{-\pi}^{\pi} g(y)\cos[\frac{y}{2}]\sin[ny]\,\mathrm{d}y = 0.$$

Analogamente si dimostra che

$$(7*)\quad \lim_n \int_0^{\pi} \frac{f[x+y] - f[x+]}{\sin[\frac{y}{2}]}\sin[\frac{y}{2}]\cos[ny]\,\mathrm{d}y = \lim_n \int_{-\pi}^{\pi} g[y]\sin[\frac{y}{2}]\cos[ny]\,\mathrm{d}y = 0.$$

In conclusione, abbiamo calcolato il primo limite di (1*). Mediante la sostituzione $x \overset{s}{=} -x$, si ottiene anche il secondo limite, riconducendolo al primo. E con ciò la dimostrazione del teorema è conclusa. □