a distanza minima da X. Infatti, se per semplicità poniamo $Y = \mathrm{E}(X \mid \mathcal{D})$, allora, per ogni $Z \in L^2(\mathcal{D})$,

$$\begin{aligned}\|X - Z\|_2^2 &= \mathrm{E}[(X - Z)^2] = \mathrm{E}[(X - Y + Y - Z)^2] = \\ &= \mathrm{E}[(X - Y)^2] + 2\underbrace{\mathrm{E}[(X - Y)(Y - Z)]}_{=0} + \mathrm{E}[(Y - Z)^2] = \\ &= \mathrm{E}[(X - Y)^2] + \mathrm{E}[(Y - Z)^2] \geq \mathrm{E}[(X - Y)^2] = \|X - Y\|_2^2\end{aligned}$$

dove la disuguaglianza è anzi stretta, a meno che non sia $Z = Y$ q.c. (il doppio prodotto è uguale a 0 grazie alla (3.4), poiché $W = Y - Z$ è $\mathcal{D}$-misurabile).

Quindi, nel senso di L^2, $Y = \mathrm{E}(X \mid \mathcal{D})$ è *la migliore approssimazione di X mediante una v.a. $\mathcal{D}$-misurabile.*

Esempio 3.6 Se $\mathcal{D} = \{\Omega, \emptyset\}$ è la σ-algebra banale, allora

$$\mathrm{E}(X \mid \mathcal{D}) = \mathrm{E}(X).$$

Infatti le sole v.a. $\mathcal{D}$-misurabili sono le costanti e, se $c = \mathrm{E}(X \mid \mathcal{D})$, allora la costante c risulta determinata dalla relazione $c = \mathrm{E}[\mathrm{E}(X \mid \mathcal{D})] = \mathrm{E}(X)$. La nozione di speranza matematica appare quindi come un caso particolare di quella di speranza condizionale.

Esempio 3.7 Sia $A \in \mathcal{F}$ un insieme di probabilità positiva e consideriamo la σ-algebra $\mathcal{D} = \{A, A^c, \Omega, \emptyset\}$. Allora $\mathrm{E}(X \mid \mathcal{D})$, che è $\mathcal{D}$-misurabile, è una v.a. reale costante su A e su A^c. Dalla relazione

$$\mathrm{E}[1_A \mathrm{E}(X \mid \mathcal{D})] = \mathrm{E}(X 1_A)$$

e dalla sua analoga per A^c si ricava facilmente che

$$\mathrm{E}(X \mid \mathcal{D}) = \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{P}(A)} \int_A X \, d\mathrm{P} & \text{su } A \\ \frac{1}{\mathrm{P}(A^c)} \int_{A^c} X \, d\mathrm{P} & \text{su } A^c. \end{cases}$$

In particolare $\mathrm{E}(X \mid \mathcal{D})$ vale $\int X \, d\mathrm{P}_A$ su A, dove P_A è come nella Definizione 1.1 e $\int X \, d\mathrm{P}_{A^c}$ su A^c.

Esempio 3.8 Sia $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (B_t)_t, \mathrm{P})$ un moto browniano. Allora se $s \leq t$

$$\mathrm{E}(B_t \mid \mathcal{F}_s) = B_s \qquad \text{q.c.}$$

Infatti

$$\mathrm{E}(B_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathrm{E}(B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s) + \mathrm{E}(B_s \mid \mathcal{F}_s) = B_s$$

poiché $B_t - B_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$ e centrata mentre B_s è $\mathcal{F}_s$-misurabile.

Il calcolo di una speranza condizionale è un'operazione che è spesso necessario fare e che, talvolta, è anzi l'obiettivo del ricercatore (vedi i paragrafi sul filtraggio, nell'ultimo capitolo). Vediamo ora due osservazioni che possono essere di aiuto a questo scopo.

Osservazione. Talvolta si deve calcolare la speranza condizionale di una v.a. X rispetto a una σ-algebra $\mathcal{D}$ ottenuta completando una σ-algebra $\mathcal{D}_0$ con l'aggiunta della famiglia $\mathcal{N}$ degli eventi trascurabili di una σ-algebra più grande, $\mathcal{F}$ per esempio. È utile osservare che si ha

$$\mathrm{E}(X \mid \mathcal{D}) = \mathrm{E}(X \mid \mathcal{D}_0) \qquad \text{q.c.}$$

Ciò è una conseguenza del fatto che un evento D appartiene a $\mathcal{D}$ se e solo se esiste un evento $D_0 \in \mathcal{D}_0$ che differisce da D solo per un evento trascurabile di $\mathcal{F}$. Dunque la v.a. $\mathrm{E}(X \mid \mathcal{D}_0)$ è $\mathcal{D}$ misurabile e, per ogni $D \in \mathcal{D}$ si ha

$$\mathrm{E}(1_D \mathrm{E}(X \mid \mathcal{D}_0)) = \mathrm{E}(1_{D_0} \mathrm{E}(X \mid \mathcal{D}_0)) = \mathrm{E}(X 1_{D_0}) = \mathrm{E}(X 1_D)$$

Siano $\mathcal{H}$ una σ-algebra e X una v.a. $\mathcal{H}$-misurabile. Se Z è una v.a. indipendente da $\mathcal{H}$, sappiamo che, se X e Z sono integrabili,

$$\mathrm{E}(XZ \mid \mathcal{H}) = X\mathrm{E}(Z). \tag{3.5}$$

Questa formula è un caso particolare del lemma seguente, che è spesso molto utile.

Lemma 3.9 *Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ uno spazio di probabilità, $(E, \mathcal{E})$ uno spazio misurabile, $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sotto-σ-algebre di $\mathcal{F}$ tra loro indipendenti.*

Siano X una v.a. $\mathcal{H}$-misurabile a valori in $(E, \mathcal{E})$ e $\psi(x, \omega)$ una funzione su $E \times \Omega$, $\mathcal{E} \otimes \mathcal{G}$-misurabile e tale che $\omega \to \psi(X(\omega), \omega)$ sia integrabile. Allora

$$\mathrm{E}(\psi(X, \cdot) \mid \mathcal{H}) = \Phi(X). \tag{3.6}$$

dove $\Phi(x) = \mathrm{E}[\psi(x, \cdot)]$.

Dimostrazione. Supponiamo dapprima ψ della forma $\psi(x, \omega) = f(x)Z(\omega)$, dove Z è $\mathcal{G}$-misurabile. In questo caso $\Phi(x) = f(x)\mathrm{E}(Z)$ e la (3.6) non è altro che la (3.5). Il lemma è quindi provato per delle funzioni ψ della forma sopradescritta e, naturalmente, per le loro combinazioni lineari. Si passa al caso generale con il Teorema 0.12.

Esempio 3.10 Siano B un moto browniano m-dimensionale e $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una funzione boreliana limitata. Sia $s < t$. Quanto vale $\mathrm{E}(f(B_t) \mid \mathcal{F}_s)$?

Basta applicare il Lemma 3.9 alla funzione $\psi(x, \omega) = f(x + B_t(\omega) - B_s(\omega))$, con $\mathcal{G} = \sigma(B_t - B_s)$, $\mathcal{H} = \mathcal{F}_s$. Poiché $x + B_t - B_s \sim N(x, (t - s)I)$, si ha

$$\Phi(x) = \mathrm{E}[f(x + B_t - B_s)] = \frac{1}{[2\pi(t - s)]^{m/2}} \int f(y) \exp\Big[-\frac{|y - x|^2}{2(t - s)}\Big] dy.$$

5
Processi di Markov

5.1 Definizioni e generalità

Definizione 5.1 *Sia $(E, \mathscr{E})$ uno spazio misurabile; una funzione di transizione markoviana su $(E, \mathscr{E})$ è una funzione $p(s, t, x, A)$, dove $s, t, \in \mathbb{R}^+$, $s \le t$, $x \in E$, $A \in \mathscr{E}$, tale che*

i) per s, t, A fissati $x \to p(s, t, x, A)$ è $\mathscr{E}$-misurabile;
ii) per s, t, x fissati $p(s, t, x, \cdot)$ è una legge di probabilità su $(E, \mathscr{E})$;
iii) p soddisfa all'equazione di Chapman-Kolmogorov

$$p(s, t, x, A) = \int_E p(u, t, y, A)\, p(s, u, x, dy) \tag{5.1}$$

per ogni $s < u < t$.

Si dice che $p(s, t, x, A)$ è una funzione di transizione se la ii) viene sostituita da
ii') per s, t, x, fissati $p(s, t, x, \cdot)$ è una misura su $(E, \mathscr{E})$ di massa totale ≤ 1.

Definizione 5.2 *Date su $(E, \mathscr{E})$ una funzione di transizione markoviana p e una legge di probabilità μ, si dice processo di Markov associato a p, di istante iniziale u e di legge iniziale μ, un processo $X = (\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \ge u}, (X_t)_{t \ge u}, \mathrm{P})$ a valori in $(E, \mathscr{E})$ tale che*

a) X_u ha legge μ.
b) $\mathrm{P}(X_t \in A \mid \mathscr{F}_s) = p(s, t, X_s, A)$ q.c. per ogni $t > s \ge u$.

Quando la filtrazione $(\mathscr{F}_t)_t$ non viene precisata s'intende, al solito, che si tratta della filtrazione naturale.

Esempio 5.3 Se $E = \mathbb{R}^m$, $\mathscr{E} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ e poniamo

$$p(s,t,x,A) = \frac{1}{[2\pi(t-s)]^{m/2}} \int_A \exp\Big[-\frac{|x-y|^2}{2(t-s)}\Big]\,dy, \tag{5.2}$$

allora p è una funzione di transizione markoviana: $p(s,t,x,\cdot)$ è una legge $N(x,(t-s)I)$. L'equazione di Chapman-Kolmogorov è facilmente verificata per le proprietà delle leggi normali rispetto al prodotto di convoluzione: se $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$,

$$\begin{aligned}
&\int p(u,t,y,A)\,p(s,u,x,dy) = \\
&= \int \frac{1}{[2\pi(u-s)]^{m/2}} \exp\Big[-\frac{|x-y|^2}{2(u-s)}\Big]\,dy \int_A \frac{1}{[2\pi(t-u)]^{m/2}} \exp\Big[-\frac{|y-z|^2}{2(t-u)}\Big]\,dz = \\
&= \int_A dz \int \frac{1}{[2\pi(u-s)]^{m/2}} \exp\Big[-\frac{|x-y|^2}{2(u-s)}\Big] \frac{1}{[2\pi(t-u)]^{m/2}} \exp\Big[-\frac{|y-z|^2}{2(t-u)}\Big]\,dy
\end{aligned}$$

e basta ora riconoscere nell'integrale interno dell'ultimo membro il prodotto di convoluzione di una legge $N(x,(t-u)I)$ con una $N(0,(u-s)I)$, il cui risultato (vedi il paragrafo 0.7) è una legge $N(x,(t-s)I)$, cioè $p(s,t,x,\cdot)$.

L'Esempio 3.10 mostra che la b) della Definizione 5.2 è soddisfatta per un moto browniano, rispetto alla funzione di transizione markoviana data dalla (5.2). Dunque il moto browniano è il nostro primo esempio di processo di Markov.

Osservazioni 1) Una immediata applicazione del Teorema 0.11 implica che, per ogni funzione misurabile limitata $f : E \to \mathbb{R}$ e per ogni $s < t$, l'applicazione

$$x \to \int_E f(y)\,p(s,t,x,dy) \tag{5.3}$$

è misurabile.

2) Per il punto b) della Definizione 5.2 si ha

$$\mathrm{P}(X_t \in A \mid X_s) = \mathrm{E}(\mathrm{P}(X_t \in A \mid \mathscr{F}_s) \mid X_s) = \mathrm{E}(p(s,t,X_s,A) \mid X_s) = p(s,t,X_s,A)$$

Intuitivamente, cioè, la conoscenza di tutta la traiettoria del processo fino al tempo s o solo della posizione al tempo s danno le stesse informazioni sullo stato del processo a un tempo t, $t \geq s$. La b) della Definizione 5.2 si chiama la *proprietà di Markov*.

3) La Definizione 5.2 permette di determinare le distribuzioni di dimensione finita di un processo di Markov. Siano infatti $t > u$, $A_0, A_1 \in \mathscr{E}$; poiché X_u ha legge μ

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_t \in A_1, X_u \in A_0) &= \mathrm{E}[1_{A_1}(X_t)1_{A_0}(X_u)] = \mathrm{E}[1_{A_0}(X_u)\mathrm{E}[1_{A_1}(X_t) \mid \mathscr{F}_u]] = \\
&= \mathrm{E}(1_{A_0}(X_u)p(u,t,X_u,A_1)) = \int_{A_0} \mu(dx)p(u,t,x,A_1).
\end{aligned}$$

Per induzione su m si ottiene facilmente, per ogni $u \leq t_1 < \ldots < t_m$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(X_u \in A_0, X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_m} \in A_m) = \\
&= \int_{A_0} \mu(dx_0) \int_{A_1} p(u,t_1,x_0,dx_1) \int_{A_2} \ldots \int_{A_n} p(t_{n-1},t_n,x_{n-1},dx_n).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

A priori quindi le distribuzioni di dimensione finita dipendono solo da μ e da p. In particolare due processi di Markov associati alla stessa funzione di transizione ed aventi uguali l'istante e la distribuzione iniziale sono equivalenti. Mostriamo ora che se E è uno spazio metrico completo munito della σ-algebra $\mathscr{B}(E)$ e p è una funzione di transizione markoviana su $(E, \mathscr{B}(E))$, esiste sempre un processo di Markov associato a p di istante iniziale u e di legge iniziale μ, qualunque siano u e μ. Si tratterà di un'altra applicazione del Teorema 1.14 di Kolmogorov.

Poniamo $\Omega = E^{\mathbb{R}^+}$; un elemento $\omega \in \Omega$ è dunque un'applicazione $\mathbb{R}^+ \to E$. Definiamo $X_t : \Omega \to E$ mediante $X_t(\omega) = \omega(t)$, $t \geq 0$ e poi $\mathscr{F}^u_t = \sigma(X_s, u \leq s \leq t)$, $\mathscr{F} = \mathscr{F}^u_\infty$. Definiamo un sistema di distribuzioni di dimensione finita ponendo per $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m\}$, $A_0, A_1, \ldots, A_m \in \mathscr{B}(E)$,

$$\begin{aligned}
&\gamma_\pi(A_0, A_1, \ldots, A_m) = \\
&= \int_{A_0} \mu(dx_0) \int_{A_1} p(u,t_1,x_0,dx_1) \int_{A_2} \ldots \int_{A_m} p(t_{m-1},t_m,x_{m-1},dx_m).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

L'equazione di Chapman-Kolmogorov (5.1) implica facilmente che il sistema $(\gamma_\pi)_\pi$ di distribuzioni di dimensione finita verifica la Condizione 1.13 di coerenza.

Esiste quindi una unica probabilità P su $(\Omega, \mathscr{F})$ di cui le γ_π sono le distribuzioni di dimensione finita. Resta da verificare che $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}^u_t)_t, (X_t)_t, \mathrm{P})$ è un processo di Markov di legge iniziale μ e associato a p.

La a) della Definizione 5.2 è immediata. La verifica di b) è un po' più laboriosa; occorre mostrare che se $D \in \mathscr{F}^u_s$, allora

$$\int_D 1_{\{X_t \in A\}}\,d\mathrm{P} = \int_D p(s,t,X_s,A)\,d\mathrm{P}. \tag{5.6}$$

Basterà (vedi Esercizio 3.1) provare la relazione per un insieme D della forma

$$D = \{X_{t_0} \in B_0, \ldots, X_{t_n} \in B_n\}$$

dove $u = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = s$, poiché per definizione gli eventi di questa forma generano $\mathscr{F}^u_s$ e formano una classe stabile per l'intersezione finita. Il termine a sinistra nella (5.6) vale allora

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(D \cap \{X_t \in A\}) = \mathrm{P}(X_{t_0} \in B_0, \ldots, X_{t_n} \in B_n, X_t \in A) = \\
&= \int_{B_0} \mu(dy_0) \int_{B_1} \ldots \int_{B_n} p(t_{n-1},t_n,y_{n-1},dy_n) \int_A p(t_n,t,y_n,dy) = \\
&= \int_{B_0} \mu(dy_0) \int_{B_1} \ldots \int_{B_n} p(t_{n-1},t_n,y_{n-1},dy_n)p(t_n,t,y_n,A).
\end{aligned}$$

La (5.6) è dunque verificata se mostriamo che, per ogni $f : E \to \mathbb{R}$ misurabile limitata,

$$\begin{aligned}\int_{B_0} \mu(dy_0) \int_{B_1} \dots \int_{B_n} f(y_n) p(t_{n-1}, t_n, y_{n-1}, dy_n) = \\ = \int_{\{X_{t_0} \in B_0, \dots, X_{t_n} \in B_n\}} f(X_{t_n})\, d\mathrm{P}.\end{aligned} \tag{5.7}$$

A questo scopo, a sua volta, grazie al Teorema 0.11, sarà sufficiente dimostrare la (5.7) per $f = 1_B$, $B \in \mathcal{B}(E)$. Ponendo $B' = B_n \cap B$, la (5.7) diventa

$$\begin{aligned}\int_{B_0} \mu(dy_0) \int_{B_1} p(t_0, t_1, y_0, dy) \dots \int_{B'} p(t_{n-1}, t_n, y_{n-1}, dy_n) = \\ = \int_{\{X_{t_0} \in B_0, \dots, X_{t_n} \in B'\}} d\mathrm{P} = \int_{\{X_{t_0} \in B_0, \dots, X_{t_n} \in B_n\}} 1_B(X_{t_n})\, d\mathrm{P}\end{aligned}$$

che è vera per come P è stata definita.

Quindi $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^u)_{t \ge u}, (X_t)_{t \ge u}, \mathrm{P})$ è un processo che soddisfa alle condizioni a) e b) della Definizione 5.2.

La legge P appena costruita dipende naturalmente, oltre che da p, da μ e da u e verrà indicata con $\mathrm{P}^{\mu,u}$. Se $\mu = \delta_x$ si scriverà $\mathrm{P}^{x,u}$ invece di $\mathrm{P}^{\delta_x,u}$.

Riprendendo il procedimento di costruzione, abbiamo mostrato che, se E è uno spazio metrico completo, allora esistono

a) uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F})$ munito di una famiglia di filtrazioni $(\mathcal{F}_t^s)_{t \ge s}$, tali che $\mathcal{F}_{t'}^{s'} \subset \mathcal{F}_t^s$ se $s \le s'$, $t' \le t$.

b) una famiglia di v.a. $X_t : \Omega \to E$ tali che $\omega \to X_t(\omega)$ sia $\mathcal{F}_t^s$-misurabile per ogni $s \le t$.

c) una famiglia di probabilità $(\mathrm{P}^{x,s})_{x \in E, s \in \mathbb{R}^+}$ su $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^s)$ tali che, per ogni x, s,

$$\mathrm{P}^{x,s}(X_s = x) = 1 \tag{5.8}$$

$$\mathrm{P}^{x,s}(X_{t+h} \in A \mid \mathcal{F}_t^s) = p(t, t+h, X_t, A) \quad \mathrm{P}^{x,s}\text{-q.c.} \tag{5.9}$$

Inoltre per ogni $\Gamma \in \sigma(X_u, u \ge s)$ l'applicazione $x \to \mathrm{P}^{x,s}(\Gamma)$ è misurabile (vedi Esercizio 5.1).

Definizione 5.4 *Una famiglia di processi $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^s)_{t \ge s}, (X_t)_t, (\mathrm{P}^{x,s})_{x,s})$ che soddisfi ad a), b), c) si dice una realizzazione del processo di Markov associato a p.*

Indicheremo con $\mathrm{E}^{x,s}$ la speranza calcolata rispetto a $\mathrm{P}^{x,s}$. Poniamo $\mathcal{G}_t^s = \sigma(X_u, s \le u \le t)$; attenzione a non confondere le due filtrazioni $(\mathcal{G}_t^s)_t$ e $(\mathcal{F}_t^s)_t$, che giocano ruoli diversi. Riprendendo l'espressione delle distribuzioni di dimensione finita (5.5), osserviamo che si ha

$$\mathrm{P}^{x,s}(X_t \in A) = \mathrm{P}^{x,s}(X_s \in E, X_t \in A) = p(s, t, x, A).$$

La proprietà di Markov (5.9) si può quindi scrivere

$$\mathrm{P}^{x,s}(X_{t+h} \in A \mid \mathcal{F}_t^s) = \mathrm{P}^{X_t,t}(X_{t+h} \in A) \qquad \mathrm{P}^{x,s}\text{-q.c.}$$

L'espressione $\mathrm{P}^{X_t,t}(X_{t+h} \in A)$, può inizialmente creare confusione. Si tratta però semplicemente della composizione della funzione $x \to \mathrm{P}^{x,t}(X_{t+h} \in A)$ con la v.a. X_t.

Se $f : E \to \mathbb{R}$ è misurabile limitata la (5.9) e una semplice applicazione del Teorema 0.11 danno

$$\mathrm{E}^{x,s}[f(X_{t+h}) \mid \mathcal{F}_t^s] = \int p(t, t+h, X_t, dy) f(y) = \mathrm{E}^{X_t,t}[f(X_{t+h})]. \tag{5.10}$$

Se p è una funzione di transizione, ad essa si può sempre associare una funzione di transizione markoviana $\bar{p}$ nel modo seguente. Sia $\bar{E} = E \cup \{\delta\}$ lo spazio topologico ottenuto aggiungendo ad E un punto isolato δ e poniamo

$$\begin{aligned}&\bar{p}(s, t, x, A) = p(s, t, x, A) && \text{se } A \in \mathcal{B}(E)\\ &\bar{p}(s, t, x, \{\delta\}) = 1 - p(s, t, x, E) &&\\ &\bar{p}(s, t, \delta, B) = 1_B(\delta) && \text{per ogni } B \in \mathcal{B}(\bar{E}).\end{aligned}$$

È facile verificare che $\bar{p}$ è una funzione di transizione markoviana su E. Una probabilità μ su E si prolunga immediatamente a una probabilità su $\bar{E}$ ponendo $\mu(\{\delta\}) = 0$.

Definizione 5.5 *Data una funzione di transizione p, una legge di probabilità μ su $(E, \mathcal{B}(E))$ e $u \in \mathbb{R}^+$ si intende per processo di Markov associato a p di legge iniziale μ e istante iniziale u il processo di Markov associato a $\bar{p}$ su $\bar{E}$ avente lo stesso istante iniziale e per legge iniziale il prolungamento naturale di μ a $\mathcal{B}(\bar{E})$.*

Lo stato δ ha un ruolo particolare: poiché $\bar{p}(s, t, \delta, \{\delta\}) = 1$, una volta che il processo entra in δ, poi vi resta definitivamente. La variabile aleatoria

$$\zeta(\omega) = \inf\{t; X_t(\omega) = \delta\}$$

si chiama *tempo di morte* (o di esplosione). Se il processo X è continuo a destra, per la Proposizione 1.11 ζ è un tempo d'arresto (non è altro che il tempo d'ingresso nello stato terminale δ).

Nel resto di questo capitolo $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^s)_{t \ge s}, (X_t)_{t \ge 0}, (\mathrm{P}^{x,s})_{x,s})$ indicherà la realizzazione di un processo di Markov associato alla funzione di transizione p.

La (5.10) permette di calcolare la speranza condizionale di una v.a., $f(X_{t+h})$, che dipende dalla posizione del processo a un istante, $t+h$, fissato. Talvolta invece è necessario calcolare la speranza condizionale $\mathrm{E}^{x,s}(Y \mid \mathcal{F}_t^s)$, dove Y è una v.a. che dipende, eventualmente, da tutta la traiettoria del processo dopo il tempo t. La proposizione seguente fornisce una formula utile. La sua dimostrazione è la solita applicazione del Teorema 0.11.

Proposizione 5.6 *Sia Y una v.a.r. $\mathcal{G}^t_\infty$ misurabile limitata. Allora*

$$E^{x,s}(Y \mid \mathcal{F}^s_t) = E^{X_t,t}(Y) \quad P^{x,s}\text{-q.c.} \tag{5.11}$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima Y della forma $f_1(X_{t_1})\dots f_m(X_{t_m})$ dove $s \le t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m \le t$ e $f_1, \dots, f_m$ sono funzioni misurabili limitate. Se $m = 1$ allora la (5.11) si riduce alla (5.10). Supponiamo la (5.15) vera per Y come sopra e per $m-1$. Allora, intercalando un condizionamento rispetto a $\mathcal{F}^s_{t_{m-1}}$,

$$\begin{aligned}
&E^{x,s}[f_1(X_{t_1})\dots f_m(X_{t_m}) \mid \mathcal{F}^s_t] = \\
&= E^{x,s}[f_1(X_{t_1})\dots f_{m-1}(X_{t_{m-1}})E^{x,s}[f_m(X_{t_m}) \mid \mathcal{F}^s_{t_{m-1}}] \mid \mathcal{F}^s_t] = \\
&= E^{x,s}[f_1(X_{t_1})\dots f'_{m-1}(X_{t_{m-1}}) \mid \mathcal{F}^s_t]
\end{aligned}$$

dove $f'_{m-1}(x) = f_{m-1}(x) \cdot E^{x,t_{m-1}}[f_m(X_{t_m})]$; per l'ipotesi d'induzione

$$\begin{aligned}
E^{x,s}[f_1(X_{t_1})\dots f_m(X_{t_m}) \mid \mathcal{F}^s_t] &= E^{X_t,t}[f_1(X_{t_1})\dots f'_{m-1}(X_{t_{m-1}})] = \\
&= E^{X_t,t}[f_1(X_{t_1})\dots f_{m-1}(X_{t_{m-1}})f_m(X_{t_m})].
\end{aligned}$$

Si passa al caso generale mediante il Teorema 0.11.

Se la funzione di transizione p dipende da s e t solo come funzione di $t-s$, si dice che p è *omogenea nel tempo*. In questo caso si ha, ricordando l'espressione delle distribuzioni di dimensione finita,

$$E^{x,s}[f_1(X_{t_1+s})\dots f_m(X_{t_m+s})] = E^{x,0}[f_1(X_{t_1})\dots f_m(X_{t_m})].$$

Quindi conviene porre $p(t,x,A) = p(0,t,x,A)$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}^0_t$, $P^x = P^{x,0}$ e considerare come realizzazione $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (X_t)_t, (P^x)_x)$. L'equazione di Chapman-Kolmogorov diviene, per $0 \le s < t$,

$$p(t,x,A) = \int p(t-s,y,A)p(s,x,dy).$$

La funzione di transizione dell'Esempio 5.3 è omogenea nel tempo.

Osservazione. L'equazione di Chapman-Kolmogorov è una conseguenza della proprietà di Markov. Più precisamente sia $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}^s_t)_{t\ge s}, (X_t)_t, (P^{x,s})_{x,s})$ una famiglia di processi stocastici tale che $X_s = x$ $P^{x,s}$-q.c. per ogni x, s e sia $p(s,t,x,A)$ una funzione che soddisfi le condizioni i) e ii) della Definizione 5.1. Allora, se per ogni $x \in E$ e $s \le u \le t$,

$$P^{x,s}(X_t \in A \mid \mathcal{F}^s_u) = p(u,t,X_u,A),$$

necessariamente p soddisfa all'equazione di Chapman-Kolmogorov (5.1) e X è una realizzazione del processo di Markov associato a p.

Infatti dapprima ponendo $u = s$ nella relazione precedente si ottiene che $p(s,t,x,\cdot)$ è la legge di X_t rispetto a $P^{x,s}$. Infine, se $s \le u \le t$,

$$\begin{aligned}
p(s,t,x,A) &= P^{x,s}(X_t \in A) = E^{x,s}[P^{x,s}(X_t \in A \mid \mathcal{F}^s_u)] = \\
&= E^{x,s}[p(u,t,X_u,A)] = \int_E p(u,t,y,A)p(s,u,x,dy).
\end{aligned}$$

5.2 Le proprietà di Feller e di Markov forte

Supporremo d'ora in avanti che E sia uno spazio metrico e che $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$.

Definizione 5.7 *Si dice che una funzione di transizione p gode della proprietà di Feller se, per ogni $h \ge 0$ fissato e per ogni funzione f continua e limitata su E, la funzione*

$$(t,z) \to \int_E f(y)p(t,t+h,z,dy)$$

è continua. Diremo che X è di Feller se la sua funzione di transizione gode della proprietà di Feller.

Definizione 5.8 *Una v.a. positiva τ si dice un s-tempo d'arresto se $\tau \ge s$ e se $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}^s_t$ per ogni $t \ge s$.*

Porremo $\mathcal{F}^s_\tau = \{A \in \mathcal{F}^s_\infty;\ A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}^s_t \text{ per ogni } t\}$.

Definizione 5.9 *Diremo che X è di Markov forte, o anche che è fortemente Markoviano, se per ogni $x \in E$ e $A \in \mathcal{B}(E)$, per ogni $s \ge 0$ e per ogni s-tempo d'arresto finito τ*

$$P^{x,s}(X_{t+\tau} \in A \mid \mathcal{F}^s_\tau) = p(\tau, t+\tau, X_\tau, A). \tag{5.12}$$

È chiaro che se $\tau \equiv h \ge 0$ la (5.12) si riduce alla proprietà di Markov solita (5.9). La (5.12) è naturalmente equivalente alla

$$E^{x,s}[f(X_{t+\tau}) \mid \mathcal{F}^s_\tau] = \int_E p(\tau, t+\tau, X_\tau, dy)f(y) \tag{5.13}$$

per ogni f boreliana limitata, grazie al solito Teorema 0.11.

Teorema 5.10 *Supponiamo X continuo a destra e di Feller. Allora è di Markov forte.*

Dimostrazione. Poiché X è continuo a destra, esso è progressivamente misurabile e dunque, per la Proposizione 1.9, X_τ e $p(\tau, t+\tau, X_\tau, A)$ sono v.a. $\mathcal{F}^s_\tau$-misurabili. Resta da dimostrare che se $\Gamma \in \mathcal{F}^s_\tau$ allora per ogni $A \in \mathcal{B}(E)$

$$\mathrm{P}^{x,s}(\{X_{t+\tau} \in A\} \cap \Gamma) = \mathrm{E}^{x,s}(p(\tau, t+\tau, X_\tau, A)1_\Gamma).$$

Cominciamo col supporre che τ assuma un insieme numerabile di valori $\{t_j\}_j$. Allora

$$\mathrm{P}^{x,s}(\{X_{t+\tau} \in A\} \cap \Gamma) = \sum_j \mathrm{P}^{x,s}(\{X_{t+\tau} \in A\} \cap \Gamma \cap \{\tau = t_j\}) =$$
$$= \sum_j \mathrm{P}^{x,s}(\{X_{t+t_j} \in A\} \cap \Gamma \cap \{\tau = t_j\}).$$

Poiché $\Gamma \cap \{\tau = t_j\} \in \mathcal{F}^s_{t_j}$, per la proprietà di Markov (5.9),

$$\mathrm{P}^{x,s}(\{X_{t+\tau} \in A\} \cap \Gamma) = \sum_j \mathrm{E}^{x,s}\big[1_{\Gamma\cap\{\tau=t_j\}} p(t_j, t+t_j, X_{t_j}, A)\big] =$$
$$= \mathrm{E}^{x,s}(p(\tau, t+\tau, X_\tau, A)1_\Gamma).$$

Sia ora τ un s-tempo d'arresto finito qualunque. Per il Lemma 2.16 esiste una successione $(\tau_n)_n$ di s-tempi d'arresto finiti, che assumono ciascuno un insieme numerabile di valori e decrescente a τ. In particolare quindi $\mathcal{F}^s_{\tau_n} \supset \mathcal{F}^s_\tau$. La proprietà di Markov forte già provata per τ_n e il Teorema 0.11 garantiscono che, se f è continua e limitata su E,

$$\mathrm{E}^{x,s}[f(X_{t+\tau_n}) \mid \mathcal{F}^s_{\tau_n}] = \int_E f(y)p(\tau_n, t+\tau_n, X_{\tau_n}, dy).$$

In particolare se $\Gamma \in \mathcal{F}^s_\tau \subset \mathcal{F}^s_{\tau_n}$

$$\mathrm{E}^{x,s}[f(X_{t+\tau_n})1_\Gamma] = \mathrm{E}^{x,s}\Big[1_\Gamma \int_E f(y)p(\tau_n, t+\tau_n, X_{\tau_n}, dy)\Big].$$

Per la continuità a destra delle traiettorie e la proprietà di Feller

$$\int_E f(y)p(\tau_n, t+\tau_n, X_{\tau_n}, dy) \underset{n\to\infty}{\to} \int_E f(y)p(\tau, t+\tau, X_\tau, dy).$$

Poiché per il Teorema di Lebesgue si ha $\mathrm{E}^{x,s}[f(X_{t+\tau_n})1_\Gamma] \to \mathrm{E}^{x,s}[f(X_{t+\tau})1_\Gamma]$ per $n \to \infty$, abbiamo ottenuto che, per ogni funzione f continua limitata

$$\mathrm{E}^{x,s}[f(X_{t+\tau})1_\Gamma] = \mathrm{E}^{x,s}\Big[1_\Gamma \int_E f(y)p(\tau, t+\tau, X_\tau, dy)\Big].$$

Usando il Teorema 0.12, la relazione precedente è vera per ogni funzione f boreliana limitata e si ha la tesi.

Osservazione. Le ipotesi di continuità a destra e di Feller non intervengono nella prima parte della dimostrazione del Teorema 5.12. Quindi la proprietà di Markov forte è sempre vera quando τ assume solo un insieme numerabile di valori.

Abbiamo già visto (Proposizione 3.14) che per un moto browniano è sempre possibile mettersi in una condizione in cui la filtrazione è continua a destra. Ciò è vero anche per i processi di Feller continui a destra. Poniamo $\mathcal{F}^s_{t+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}^s_{t+\varepsilon}$, $\mathcal{G}^s_{t+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{G}^s_{t+\varepsilon}$ (ricordiamo che $\mathcal{G}^s_t = \sigma(X_u, s \le u \le t)$).

Teorema 5.11 *Se $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}^s_t)_{t\ge s}, (X_t)_t, (\mathrm{P}^{x,s})_{x,s})$ è un processo di Markov continuo a destra e di Feller allora $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}^s_{t+})_{t\ge s}, (X_t)_t, (\mathrm{P}^{x,s})_{x,s})$ è ancora un processo di Markov associato alla stessa funzione di transizione.*

Dimostrazione. Si tratta di provare la proprietà di Markov

$$\mathrm{E}[f(X_{t+h}) \mid \mathcal{F}^s_{t+}] = \int_E f(y)p(t, t+h, X_t, dy) \tag{5.14}$$

dove f si può supporre continua e limitata su E. Una applicazione di routine del Teorema 0.12 permette infatti di estendere questa relazione a tutte le funzioni f boreliane limitate. Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\mathrm{E}^{x,s}[f(X_{t+h+\varepsilon}) \mid \mathcal{F}^s_{t+\varepsilon}] = \int_E f(y)p(t+\varepsilon, t+h+\varepsilon, X_{t+\varepsilon}, dy)$$

e condizionando ambo i membri rispetto a $\mathcal{F}^s_{t+}$, che è contenuta in $\mathcal{F}^s_{t+\varepsilon}$

$$\mathrm{E}^{x,s}[f(X_{t+h+\varepsilon}) \mid \mathcal{F}^s_{t+}] = \mathrm{E}^{x,s}\Big[\int_E f(y)p(t+\varepsilon, t+h+\varepsilon, X_{t+\varepsilon}, dy) \,\Big|\, \mathcal{F}^s_{t+}\Big].$$

Poiché le traiettorie sono continue a destra $f(X_{t+h+\varepsilon}) \to f(X_{t+h})$ q.c. per $\varepsilon \to 0+$. Per il Teorema di Lebesgue per le speranze condizionali (Proposizione 3.4 c)), il termine di sinistra converge a $\mathrm{E}^{x,s}[f(X_{t+h}) \mid \mathcal{F}^s_{t+}]$ e, grazie alla proprietà di Feller, quello di destra a

$$\mathrm{E}^{x,s}\Big[\int_E f(y)p(t, t+h, X_t, dy) \,\Big|\, \mathcal{F}^s_{t+}\Big] = \int_E f(y)p(t, t+h, X_t, dy),$$

dato che X_t è $\mathcal{F}^s_{t+}$-misurabile.

Proposizione 5.12 *(Legge 0-1 di Blumenthal) Sia X di Feller e continuo a destra. Allora la σ-algebra $\mathcal{G}^s_{s+}$ è triviale, cioè se $\Lambda \in \mathcal{G}^s_{s+}$, $\mathrm{P}^{x,s}(\Lambda)$ può assumere unicamente i valori 0 o 1.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente X è un processo di Markov rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}^s_{t+})_{t\geq s}$. Poiché $\mathcal{G}^s_{s+} \subset \mathcal{F}^s_{s+}$, se $\Lambda \in \mathcal{G}^s_{s+}$, per la Proposizione 5.6 con $s = t$,

$$1_\Lambda = \mathrm{E}^{x,s}(1_\Lambda \mid \mathcal{F}^s_{s+}) = \mathrm{E}^{x,s}(1_\Lambda) \quad \text{q.c.}$$

poiché $X_s = x$ $\mathrm{P}^{x,s}$-q.c. Dunque $\mathrm{E}^{x,s}(1_\Lambda)$ può assumere al più i valori 0 o 1.

5.3 Processi canonici

Spesso lo spazio Ω, su cui un processo di Markov è definito, è uno spazio di *traiettorie*, cioè $\omega \in \Omega$ è un'applicazione da $\mathbb{R}^+$ in E e il processo è definito da $X_t(\omega) = \omega(t)$. È il caso, ad esempio, del processo costruito con il Teorema di Kolmogorov, per il quale $\Omega = E^{\mathbb{R}^+}$; per i processi che considereremo spesso sarà $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$. Diremo, in questo caso, che il processo di Markov è *canonico*.

In questo caso si può definire, per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, l'applicazione $\theta_t : \Omega \to \Omega$ mediante

$$\theta_t\omega(s) = \omega(t+s).$$

Le applicazioni θ_t si chiamano gli *operatori di traslazione* e vale la relazione

$$X_s(\theta_t\omega) = X_s \circ \theta_s(\omega) = X_{t+s}(\omega).$$

Gli operatori di traslazione permettono di dare delle formulazioni delle proprietà di Markov e di Markov forte che sono più pratiche nei calcoli concreti. Nonostante una certa difficoltà iniziale per familiarizzarsi con queste notazioni, spesso si tratta del solo modo di risolvere in maniera semplice e rigorosa dei calcoli altrimenti problematici.

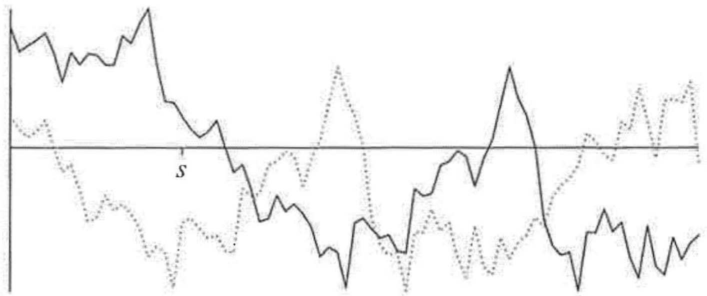

Figura 5.1 La traiettoria a puntini è ottenuta applicando la traslazione θ_s a quella a tratto pieno.

Poiché $X_s \circ \theta_t = X_{t+s}$, ogni v.a. $\tilde{Y}$ $\mathcal{G}^t_\infty$-misurabile è della forma $\tilde{Y} = Y \circ \theta_t$, con Y $\mathcal{G}^0_\infty$-misurabile. La (5.11) ad esempio diviene

$$\mathrm{E}^{x,s}(Y \circ \theta_t \mid \mathcal{F}^s_t) = \mathrm{E}^{X_s,s}(Y \circ \theta_t) \qquad \mathrm{P}^{x,s}\text{-q.c.} \tag{5.15}$$

per ogni v.a. Y $\mathcal{G}^0_\infty$-misurabile limitata.

Se $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ è una v.a., si può definire, su $\Omega_\sigma = \{\sigma < +\infty\}$, l'operatore di traslazione θ_σ mediante

$$(\theta_\sigma\omega)(t) = \omega(t + \sigma(\omega)).$$

La proprietà di Markov forte (5.13) allora si può scrivere

$$\mathrm{E}^{x,s}(f(X_t) \circ \theta_\tau \mid \mathcal{F}^s_\tau) = \mathrm{E}^{X_\tau,\tau}(f(X_t) \circ \theta_\tau)$$

per ogni $t \geq 0$. Con argomenti simili a quelli della Proposizione 5.6 (ma che richiedono un po' più di attenzione) si ottiene il seguente risultato simile (Vedi, ad esempio, [DM87] capitolo XIV per una dimostrazione).

Proposizione 5.13 *Se X è un processo di Markov canonico fortemente markoviano e continuo a destra, allora per ogni v.a. reale Y $\mathcal{G}^0_\infty$-misurabile limitata o positiva e per ogni s-tempo d'arresto finito τ*

$$\mathrm{E}^{x,s}(Y \circ \theta_\tau \mid \mathcal{F}^s_\tau) = \mathrm{E}^{X_\tau,\tau}(Y \circ \theta_\tau). \tag{5.16}$$

Una versione ancora più utile della proprietà di Markov forte è la seguente.

Proposizione 5.14 *Sia X è un processo di Markov canonico fortemente markoviano e continuo a destra. Siano $F : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{G}^0_\infty$-misurabile e τ un s-tempo d'arresto finito. Allora*

$$\mathrm{E}^{x,s}[F(\theta_\tau\cdot, \tau) \mid \mathcal{F}^s_\tau] = G(X_\tau, \tau)$$

dove $G(z,t) = \mathrm{E}^{z,t}[F(\theta_\tau\cdot, t)]$.

Dimostrazione. Praticamente identica a quella del Lemma 3.9: se F è della forma $F(t,\omega) = g(t)Y(\omega)$, con g boreliana su $\mathbb{R}^+$ e Y $\mathcal{G}^0_\infty$-misurabile, allora, per la Proposizione 5.13,

$$\mathrm{E}^{x,s}[F(\theta_\tau\cdot, \tau) \mid \mathcal{F}_\tau] = g(\tau)\mathrm{E}^{x,s}[Y \circ \theta_\tau \mid \mathcal{F}_\tau] = g(\tau)\mathrm{E}^{X_\tau,\tau}[Y \circ \theta_\tau]$$

mentre $G(z,t) = g(t)\mathrm{E}^{z,t}[Y \circ \theta_\tau]$. La proposizione è dunque provata per le funzioni di questa forma e loro combinazioni lineari. Si passa al caso generale con il solito Teorema 0.12.

Se X è omogeneo nel tempo la proprietà di Markov forte (5.12) diviene

$$\mathrm{P}^x(X_{t+\tau} \in A \mid \mathcal{F}_\tau) = p(t, X_\tau, A)$$

ovvero se f è boreliana limitata

$$\mathrm{E}[f(X_{t+\tau}) \mid \mathcal{F}_\tau] = \int_E p(t, X_\tau, dy) f(y) = \mathrm{E}^{X_\tau}[f(X_t)]. \tag{5.17}$$

Le due Proposizioni 5.13 e 5.14 si possono formulare, nel caso omogeneo nel modo seguente.

Proposizione 5.15 *Se X è un processo di Markov canonico fortemente markoviano, omogeneo nel tempo e continuo a destra, allora per ogni v.a. reale Y $\mathcal{G}^0_\infty$-misurabile limitata e ogni tempo d'arresto finito τ*

$$\mathrm{E}^x[Y \circ \theta_\tau \mid \mathcal{F}_\tau] = \mathrm{E}^{X_\tau}[Y]. \tag{5.18}$$

Inoltre, se $F : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{G}^0_\infty$-misurabile limitata o positiva, allora

$$\mathrm{E}^x[F(\theta_\tau \cdot, \tau) \mid \mathcal{F}_\tau] = G(X_\tau, \tau)$$

dove $G(z, t) = \mathrm{E}^z[F(\cdot, t)]$.

Esempio 5.16 Ritorniamo al principio di riflessione, Proposizione 2.17 di cui daremo un'altra dimostrazione, che spiega il termine "principio di riflessione". Se l'idea è semplice, d'altra parte la sua realizzazione rigorosa richiede l'uso della proprietà di Markov forte in una delle versioni di questo paragrafo.

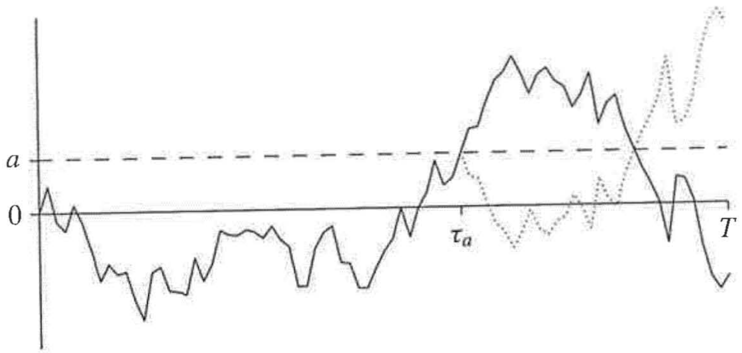

Figura 5.2 Dopo il tempo τ_a le due traiettorie del moto browniano, quella a linea piena e la sua simmetrica rispetto ad a, a puntini, "hanno la stessa probabilità". Di queste una si trova al di sopra di a al tempo T, l'altra al di sotto.

Sia $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (X_t)_t, (\mathrm{P}^x)_x)$ la realizzazione canonica di un moto browniano e indichiamo ancora con τ_a il tempo di passaggio per $a > 0$, si ha chiaramente

$$\mathrm{P}^0(\tau_a \le t) = \mathrm{P}^0(\tau_a \le t, X_t > a) + \mathrm{P}^0(\tau_a \le t, X_t < a).$$

L'intuizione, vedi la Figura 5.2, suggerisce che le due quantità a destra siano uguali, per cui si avrebbe subito, poiché $\{\tau_a \le t\} \supset \{X_t > a\}$

$$\mathrm{P}^0(\tau_a \le t) = 2\mathrm{P}^0(\tau_a \le t, X_t > a) = 2\mathrm{P}^0(X_t > a).$$

Vediamo di rendere rigorosa questa intuizione. Si ha

$$\mathrm{P}^0(\tau_a \le t, X_t < a) = \mathrm{E}^0[1_{\{\tau_a \le t\}} 1_{\{X_t > a\}}].$$

Ma se $\tau_a(\omega) \le t$, allora $X_t(\omega) = X_{t-\tau_a}(\theta_{\tau_a}\omega)$, dato che la posizione della traiettoria ω al tempo t coincide con quella di $\theta_{\tau_a}\omega$ al tempo $t - \tau_a$. Dunque, condizionando rispetto a $\mathcal{F}_\tau$,

$$\mathrm{P}^0(\tau_a \le t, X_t < a) = \mathrm{E}^0[1_{\{\tau_a \le t\}} 1_{\{X_{t-\tau_a} > a\}}(\theta_{\tau_a} \cdot)] = \mathrm{E}^0[1_{\{\tau_a \le t\}} G(X_{\tau_a}, \tau_a)]$$

dove $G(x, s) = \mathrm{E}^x[1_{\{X_{t-s} > a\}}] = \mathrm{P}^x(X_{t-s} > a)$. Poiché $X_{\tau_a} = a$ q.c. su $\{\tau_a \le t\}$ e $G(a, s) = \mathrm{P}^a(X_{t-s} > a) = \frac{1}{2}$ per ogni $s \le t$, possiamo concludere che

$$\mathrm{P}^0(\tau_a \le t, X_t < a) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{P}^0(\tau_a \le t).$$

Per gli operatori di traslazione valgono alcune formule, all'apparenza un po' esoteriche, ma particolarmente utili. Supponiamo il processo continuo (cioè che Ω sia uno spazio di traiettorie continue). Sia σ un tempo d'arresto e indichiamo con τ_A il tempo d'ingresso nell'insieme chiuso $A \subset E$. Allora la v.a. ρ definita da $\rho = +\infty$ su $\{\sigma = +\infty\}$ e da

$$\rho = \sigma + \tau_A \circ \theta_\sigma \tag{5.19}$$

su $\{\sigma < +\infty\}$, è un tempo d'arresto e, più precisamente, è *il primo tempo d'ingresso in A dopo il tempo σ*. È chiaro infatti che $\tau_A(\theta_\sigma\omega)$ è il tempo che impiega la traiettoria ω, dopo il tempo σ, prima di entrare in A. In particolare, se $B \supset A$ e $\sigma = \tau_B$, allora

$$\tau_A = \tau_B + \tau_A \circ \theta_{\tau_B}. \tag{5.20}$$

Infatti il primo tempo d'ingresso in A è necessariamente successivo al primo tempo d'ingresso in B e $\tau_A(\theta_{\tau_B}\omega)$ è il tempo che trascorre tra l'ingresso in B e l'ingresso in A. Più in generale, se σ e τ sono tempi d'arresto, è un tempo d'arresto la v.a.

$$\rho = \sigma + \tau \circ \theta_\sigma$$

(con la solita convenzione $\rho = +\infty$ se $\sigma = +\infty$), anche se non è possibile ora dare a ρ un significato intuitivo come per la (5.19). In generale, se σ e τ sono q.c. finiti, anche ρ è q.c. finito e si ha la relazione

$$X_\rho = X_\tau \circ \theta_\sigma, \tag{5.21}$$

a ben vedere anch'essa abbastanza intuitiva.

Un esempio tipico di applicazione di queste formule è il seguente. Se $A \subset B$, allora la relazione $X_{\tau_A} = X_{\tau_A} \circ \theta_{\tau_B}$ e la Proposizione 5.15 applicata alla v.a. $Y = f(X_{\tau_A})$ danno, supponendo che τ_A e τ_B siano entrambi finiti,

$$\mathrm{E}^x[f(X_{\tau_A}) \mid \mathcal{F}_{\tau_B}] = \mathrm{E}^x[f(X_{\tau_A}) \circ \theta_{\tau_B} \mid \mathcal{F}_{\tau_B}] = \mathrm{E}^{X_{\tau_B}}[f(X_{\tau_A})]. \tag{5.22}$$

Dunque

$$\mathrm{E}^x[f(X_{\tau_A})] = \mathrm{E}^x[\mathrm{E}^{X_{\tau_B}}[f(X_{\tau_A})]]. \tag{5.23}$$

Nell'Esercizio 5.5 viene sviluppata un'applicazione interessante di questa relazione.

5.4 Semigruppo associato a una funzione di transizione, diffusioni

Sia p una funzione di transizione, che per ora supporremo omogenea nel tempo. A p si può associare la famiglia di operatori $(T_t)_{t\ge 0}$ definita su $M_b(E)$ (funzioni boreliane limitate su E) da

$$T_t f(x) = \int_E f(y)\, p(t, x, dy).$$

Se X è una realizzazione del processo di Markov associato a p si ha anche

$$T_t f(x) = \mathrm{E}^x[f(X_t)]. \tag{5.24}$$

Per l'equazione di Chapman-Kolmogorov si ha

$$T_s T_t = T_{s+t},$$

cioè la famiglia di operatori $(T_t)_t$ è un *semigruppo*. Se per di più p è di Feller, T_t opera anche su C_b, cioè $T_t f \in C_b$ se $f \in C_b f$. Se $f \in M_b(E)$ poniamo, se il limite esiste,

$$Af(x) = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}[T_t f(x) - f(x)]. \tag{5.25}$$

Indichiamo con $\mathcal{D}(A)$ l'insieme delle funzioni $f \in M_b(E)$ per le quali il limite in (5.25) esiste per ogni x. L'operatore A è definito per $f \in \mathcal{D}(A)$ e si chiama il *generatore infinitesimale* del semigruppo $(T_t)_t$ o del processo di Markov X.

In questo paragrafo vedremo alcune proprietà dell'operatore A e caratterizzeremo una classe importante di processi di Markov imponendo delle condizioni su A. Supporremo d'ora in avanti che E sia un aperto $D \subset \mathbb{R}^m$.

Quanto detto finora si può ripetere con ovvi mutamenti quando p non sia omogenea nel tempo. In questo caso definiremo la famiglia di operatori $(T_{s,t})_{s\le t}$ mediante

$$T_{s,t} f(x) = \int f(y)\, p(s, t, x, dy) = \mathrm{E}^{x,s}[f(X_t)]$$

e naturalmente, per $s \le u \le t$, l'equazione di Chapman-Kolmogorov diviene

$$T_{s,t} = T_{s,u} T_{u,t}.$$

Invece dell'operatore A bisognerà considerare la famiglia di operatori $(A_s)_s$ definita, quando l'espressione ha senso, da

$$A_s f(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}[T_{s,s+h} f(x) - f(x)].$$

Diremo che il generatore infinitesimale A è *locale* quando il valore di $Af(x)$ dipende solo dal comportamento di f in un intorno di x. Cioè se, date due funzioni f, g che coincidono in un intorno di x, allora se $Af(x)$ è definito, anche $Ag(x)$ è definito e $Af(x) = Ag(x)$.

Proposizione 5.17 *Sia $B_R(x)$ la sfera di raggio R e centro x e supponiamo che per ogni $x \in D$ e $R > 0$ si abbia*

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\, p(t, t+h, x, B_R(x)^c) = 0. \tag{5.26}$$

Allora A_t è locale.

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{D}(A)$, allora

$$\frac{1}{h}[T_{t,t+h} f(x) - f(x)] = \frac{1}{h}\int [f(y) - f(x)]\, p(t, t+h, x, dy) =$$

$$= \frac{1}{h}\int_{B_R(x)} [f(y) - f(x)]\, p(t, t+h, x, dy) + \frac{1}{h}\int_{B_R^c} [f(y) - f(x)]\, p(t, t+h, x, dy).$$

Poiché

$$\frac{1}{h}\Big|\int_{B_R(x)^c} [f(y) - f(x)] p(t, t+h, x, dy)\Big| \le \frac{1}{h}\cdot 2\|f\|_\infty p(t, t+h, x, B_R(x)^c)$$

si conclude che dei due limiti

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int [f(y) - f(x)]\, p(t, t+h, x, dy), \quad \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_{B_R(x)} [f(y) - f(x)]\, p(t, t+h, x, dy)$$

l'uno esiste se e solo se esiste l'altro; inoltre $A_t f(x)$ non dipende dai valori di f al di fuori di $B_R(x)$, per ogni $R > 0$.

L'operatore A soddisfa al *principio del massimo* nella forma seguente:

Proposizione 5.18 *(Principio del massimo). Se $f \in \mathcal{D}(A)$ e x è un punto di massimo per f tale che $f(x) \geq 0$, allora $Af(x) \leq 0$. Se per di più p è una funzione di transizione markoviana, l'ipotesi $f(x) \geq 0$ può essere eliminata.*

Dimostrazione.

$$T_t f(x) = \int f(y) p(t, x, dy) \leq \int f(x) p(t, x, dy) = f(x) p(t, x, \mathbb{R}^m) \leq f(x)$$

e dunque $\frac{1}{t}\,[T_t f(x) - f(x)] \leq 0$ per ogni $t > 0$.

Se A è locale, il principio del massimo prende la forma seguente. La dimostrazione è abbastanza ovvia.

Proposizione 5.19 *Se A è locale, allora se $f \in \mathcal{D}(A)$ e x è un punto di massimo relativo per f con $f(x) \geq 0$, allora $Af(x) \leq 0$. Se per di più p è una funzione di transizione markoviana, l'ipotesi $f(x) \geq 0$ può essere eliminata.*

Se $E = \mathbb{R}^m$, la proposizione seguente fornisce un modo per calcolare il generatore A, almeno per una certa classe di funzioni.

Proposizione 5.20 *Supponiamo che per ogni $R > 0$, $t \geq 0$ esistano i limiti*

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\, p(t, t+h, x, B_R(x)^c) = 0 \tag{5.27}$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_{B_R(x)} (y_i - x_i)\, p(t, t+h, x, dy) = b_i(x, t) \tag{5.28}$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_{B_R(x)} (y_i - x_i)(y_j - x_j)\, p(t, t+h, x, dy) = a_{ij}(x, t). \tag{5.29}$$

Allora la matrice $a(x, t)$ è semidefinita positiva per ogni x, t e, posto

$$L_t = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

si ha, per ogni funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^m) \cap C_b(\mathbb{R}^m)$,

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\, [T_{t,t+h} f(x) - f(x)] = L_t f(x) \qquad \text{per ogni } x \in D.$$

Dimostrazione. Per la (5.27),

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\, [T_{t,t+h} f(x) - f(x)] &= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int [f(y) - f(x)]\, p(t, t+h, x, dy) = \\ &= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_{B_R(x)} [f(y) - f(x)]\, p(t, t+h, x, dy).\end{aligned}$$

Sostituendo a f il suo sviluppo di Taylor all'ordine 2,

$$f(y) = f(x) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,(y_i - x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\,(y_i - x_i)(y_j - x_j) + o(|x - y|^2)$$

si trova

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\, [T_{t,t+h} f(x) - f(x)] = L_t f(x) + \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_{B_R(x)} o(|x - y|^2)\, p(t, t+h, x, dy).$$

Ma quest'ultimo limite vale 0 perché

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{h\to 0+}} \frac{1}{h} \int_{B_R(x)} o(|x - y|^2)\, p(t, t+h, x, dy) \leq \\ &\leq \overline{\lim_{h\to 0+}} \frac{o(R^2)}{R^2} \int_{B_R(x)} |x - y|^2\, p(t, t+h, x, dy) = \frac{o(R^2)}{R^2} \sum_{i=1}^m a_{ii}(x, t)\end{aligned}$$

e si conclude sfruttando l'arbitrarietà di R. Resta da mostrare che la matrice $a(x, t)$ è semidefinita positiva per ogni x, t. Siano $\theta \in \mathbb{R}^m$ e $f \in C^2(\mathbb{R}^m) \cap C_b(\mathbb{R}^m)$ una funzione tale che $f(y) = -\langle \theta, y - x \rangle^2$ per y in un intorno di x. Allora, poiché le derivate prime di f si annullano in x, mentre $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = -2\theta_i \theta_j$,

$$-\langle a(x, t)\theta, \theta \rangle = L_t f(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}[T_{t,t+h} f(x) - f(x)].$$

Ma x è un punto di massimo relativo per f e $f(x) = 0$. Quindi, per la Proposizione 5.19, $-\langle a(x, t)\theta, \theta \rangle = L_t f(x) \leq 0$.

Definizione 5.21 *Sia*

$$L_t = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

un operatore differenziale su $\mathbb{R}^m$ tale che la matrice $a(x, t)$ sia semidefinita positiva. Un processo m-dimensionale $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (X_t)_t, \mathrm{P})$ si dice una diffusione se

a) è fortemente markoviano.

b) Le traiettorie sono continue su $[0, \zeta(\omega)[$ e il limite $\lim_{t\to\zeta(\omega)-} X_t(\omega)$ esiste su $\{\zeta < +\infty\}$.

c) Per ogni funzione $f \in C_K^2(\mathbb{R}^m)$, se $(T_{s,t})_{t\geq s}$ è il semigruppo associato a p,

$$T_{s,t}(x) = f(x) + \int_s^t T_{s,u} L_u f(x)\, du. \tag{5.30}$$

È naturale ora la questione se, dato un operatore differenziale L_t come nella Definizione 5.21, esista un processo di diffusione ad esso associato.

Nei prossimi capitoli daremo una risposta a questo problema; il metodo consisterà nel costruire un nuovo processo partendo dal moto browniano. Quest'ultimo è del resto anch'esso una diffusione. Sapreste indovinarne il generatore? Vedi comunque l'Esercizio 5.7.

È opportuno però indicare anche un altro approccio. Consideriamo il caso omogeneo e supponiamo che gli operatori T_t ed L commutino; allora la (5.30) diviene

$$T_t f(x) = f(x) + \int_0^t LT_u f(x)\,du$$

cioè la funzione $u(x,t) = T_t f(x)$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} Lu = \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \tag{5.31}$$

Sia ora $q(t,x,y)$ la *soluzione fondamentale* dell'equazione del calore associata a L, cioè la soluzione di

$$\begin{cases} Lq = \dfrac{\partial q}{\partial t} \\ q(0,x,y) = \delta_x(y) \end{cases} \tag{5.32}$$

dove δ_x è la massa di Dirac nel punto x. Allora la soluzione u di (5.31) è data da $u(x,t) = \int q(t,x,y) f(y)\,dy$. Ma $u(x,t) = T_t f(x)$ e quindi la funzione di transizione deve essere

$$p(t,x,dy) = q(t,x,y)\,dy. \tag{5.33}$$

Un modo di affrontare il problema consiste quindi nello studiare l'equazione (5.32), nel verificare che la p definita nella (5.33) è una funzione di transizione e che il semigruppo $(T_t)_t$ associato a p è soluzione di (5.30). A questo punto resta solo da costruire un processo di Markov associato a p e che soddisfi ai punti a) e b) della Definizione 5.21.

Studieremo comunque più tardi (capitolo 9) il legame tra diffusioni e problemi alle derivate parziali.

Esercizi

E5.1 Sia $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^s)_{t\ge s}, (X_t)_t, (\mathrm{P}^{x,s})_{x,s})$ la realizzazione di un processo di Markov a valori nello spazio misurabile $(E, \mathscr{E})$ e poniamo al solito $\mathcal{G}_\infty^s = \sigma(X_u, u \ge s)$. Allora per

ogni $\Gamma \in \mathcal{G}_\infty^s$, per ogni $s \ge 0$ fissato e per ogni probababilità μ su $(E, \mathscr{E})$, l'applicazione $x \to \mathrm{P}^{x,s}(\Gamma)$ è misurabile e si ha

$$\mathrm{P}^{\mu,s}(\Gamma) = \int_E \mathrm{P}^{x,s}(\Gamma)\,\mu(dx).$$

[L'enunciato è vero se Γ è della forma $\{X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n\}$. Si usa poi il Teorema 0.11.]

E5.2 Sia $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^s)_{t\ge s}, (X_t)_t, (\mathrm{P}^{x,s})_{x,s})$ la realizzazione di un processo di Markov associato alla funzione di transizione p. Allora X resta un processo di Markov associato a p se a $(\mathcal{F}_t)_t$ si sostituisce un'altra filtrazione $(\mathcal{G}_t)_t$ più piccola (cioè tale che $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$ per ogni t), purché contenente la filtrazione naturale.

E5.3 a) (Criterio di Dynkin) Sia $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (X_t)_t, \mathrm{P})$ un processo di Markov associato alla funzione di transizione p ed a valori in $(E, \mathscr{E})$. Siano $(G, \mathcal{G})$ uno spazio misurabile e $\Phi : E \to G$ un'applicazione misurabile e surgettiva. Supponiamo che per ogni $A \in \mathcal{G}$ si abbia

$$p(s,t,x,\Phi^{-1}(A)) = p(s,t,z,\Phi^{-1}(A)). \tag{5.34}$$

per ogni x, z tali che $\Phi(x) = \Phi(z)$; poniamo, per $\xi \in G$ e $A \in \mathcal{G}$, $q(s,t,\xi,A) = p(s,t,x,\Phi^{-1}(A))$, dove ξ è un elemento qualunque di E tale che $\Phi(x) = \xi$.

a) Mostrare che q è una funzione di transizione su $(G, \mathcal{G})$ e, posto $Y_t = \Phi(X_t)$, che $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (Y_t)_t, \mathrm{P})$ è un processo di Markov associato a q (osservazione utile: è un processo di Markov rispetto alla stessa filtrazione).

b) Siano X un moto browniano m-dimensionale e $z \in \mathbb{R}^m$ un punto fissato. Poniamo $Y_t = |X_t - z|$; Y_t è dunque la distanza di X_t da z. Mostrare che $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (Y_t)_t, \mathrm{P})$ è un processo di Markov.

[a) Se si pone, per ogni funzione misurabile limitata $f : G \to \mathbb{R}$,

$$Q_{s,u} f(\xi) = \int_G f(y)\, q(s,u,\xi,d\eta)$$

e si definisce l'operatore $P_{s,u}$ in maniera simile, allora si ha $(Q_{s,u} f) \circ \Phi = P_{s,u}(f \circ \Phi)$. Questa relazione permette di provare che q verifica l'equazione di Chapman-Kolmogorov, la quale si può scrivere $Q_{s,u}(Q_{u,t} f) = Q_{s,t} f$. b) Osservare che se $Z \sim N(0, I)$, allora la funzione di transizione del moto browniano si può scrivere

$$p(s,x,A) = \mathrm{P}(\sqrt{s}Z \in A - x). \tag{5.35}$$

Si usa poi l'invarianza per rotazione delle leggi $N(0, I)$.]

• a) Questo esercizio affronta una questione generale di un certo interesse: una funzione di un processo di Markov è ancora un processo di Markov? La risposta è affermativa se Φ è iniettiva (è immediato), ma è, in generale, negativa altrimenti. Il criterio di Dynkin (cioè la (5.34)) dà una condizione sufficiente semplice perché invece ciò sia vero.

b) Il processo di Markov introdotto in b) si chiama *processo di Bessel*. Si tratta di una diffusione su $\mathbb{R}^+$, che sarà l'oggetto anche dell'Esercizio 7.11. Intanto però il lettore può cominciare a pensare quale potrebbe esserne il generatore infinitesimale ...

E5.4 Siano X un processo gaussiano m-dimensionale centrato e $K_{s,t}^{i,j} = \mathrm{E}(X_s^i X_t^j)$ la relativa funzione di covarianza. Supponiamo la matrice $K_{s,s}$ invertibile per ogni s.

a) Mostrare che, per ogni s, t, $s \le t$, esistono una matrice $C_{t,s}$ ed una v.a. $Y_{t,s}$, gaussiana e indipendente da X_s, tali che

$$X_t = C_{t,s} X_s + Y_{t,s}.$$

Qual è la legge condizionale di X_t dato $X_s = x$?

b) Provare che X è di Markov per la filtrazione naturale $(\mathcal{G}_t)_t$ se e solo se per ogni $u \le s \le t$

$$K_{t,u} = K_{t,s} K_{s,s}^{-1} K_{s,u}. \tag{5.36}$$

[a) Si tratta di una ripetizione degli argomenti dell'Esercizio 3.6. b) Si usa il Lemma 3.9; la (5.36) è equivalente a richiedere che $Y_{t,s}$ sia ortogonale a X_u per ogni $u \le s$.]

E5.5 Siano B un moto browniano m-dimensionale, D un aperto limitato di $\mathbb{R}^m$, τ il tempo d'uscita da D e f una funzione misurabile e limitata su ∂D. Poniamo

$$u(x) = \mathrm{E}^x[f(B_\tau)].$$

Allora u è armonica in D.

[Si usano la proprietà di Markov forte, nella versione (5.23), e l'Esercizio 2.9 per provare che $u(x)$ coincide con la media di u sulla superficie di ogni sferetta $B_R(x)$ contenuta in D (le funzioni misurabili e limitate con questa proprietà sono armoniche).]

E5.6 Sia $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^s)_{t\ge s}, (X_t)_t, (\mathrm{P}^{x,s})_{x,s})$ un processo di diffusione su $\mathbb{R}^m$ di generatore L_u. Per ogni $f \in C_K^2$, $s \ge 0$ e $x \in \mathbb{R}^m$, poniamo

$$H_{x,s}^f(t) = f(X_t) - f(x) - \int_s^t L_u f(X_u)\, du.$$

Allora $(H_{x,s}^f(t))_t$ è una $\mathrm{P}^{x,s}$-martingala rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_t^s)_{t\ge s}$.

E5.7 Sia B un moto browniano m-dimensionale.

a) Mostrare che $\mathrm{P}(|B_t| \ge r) \le 2m\,\mathrm{P}(B_1(t) \ge r m^{-1/2})$.

b) Provare che il moto browniano ha generatore $Lf = \frac{1}{2}\Delta f$ per $f \in C^2 \cap C_b$.

E5.8 (Ponte browniano). Si farà uso degli Esercizi 5.4 e 3.6. Sia B un moto browniano reale e poniamo $\mathring{B}_t = B_t - tB_1$. Allora:

a) $(\mathring{B}_t)_{t\le 1}$ è un processo gaussiano centrato indipendente da B_1. Quanto vale la funzione di covarianza $K_{s,t} = \mathrm{E}(\mathring{B}_s \mathring{B}_t)$? Calcolare la legge di $\mathring{B}_t$ e la legge condizionale di $\mathring{B}_t$ dato $\mathring{B}_s = x$, $0 \le s < t \le 1$.

b) Provare che si tratta di un processo di Markov non omogeneo e calcolarne la funzione di transizione.

c) Scopo di quest'ultima parte è il calcolo del generatore del ponte browniano. Indicheremo con p la funzione di transizione del ponte browniano calcolata in b).

c1) Mostrare che per ogni $\alpha > 0$, $M > 0$, $R > 0$, $K > 0$ si ha

$$\frac{1}{h^\alpha}\int_{|z|\ge R/\sqrt{h}} |z|^M e^{-z^2/2K}\, dz \overset{h\to 0}{\to} 0.$$

c2) Mostrare che, per ogni $M \ge 0$

$$\frac{1}{h}\int_{|y-x|>R} |y-x|^M p(s, s+h, x, dy) \overset{h\to 0}{\to} 0.$$

c3) Calcolare il generatore del ponte browniano per $f \in C^2 \cap C_b$, per $0 \le t < 1$.

[b) Si usa il criterio dell'Esercizio 5.4 b). c3) Si usa la Proposizione 5.20.]

• Il generatore del ponte browniano viene trovato, con calcoli molto più semplici, anche negli Esercizi 8.1 c) oppure 8.4.

E5.9 L'obiettivo di questo esercizio è il calcolo della legge del sup di un ponte browniano X. Come si è visto nell'Esercizio 5.8, si tratta di un processo gaussiano continuo, centrato e di funzione di covarianza $K_{s,t} = s(1-t)$.

a) Mostrare che esiste un moto browniano B tale che, per $0 \le t < 1$,

$$X_t = (1-t) B_{\frac{t}{1-t}}. \tag{5.37}$$

b) Mostrare che, per ogni $a > 0$,

$$\mathrm{P}\Big(\sup_{0\le t\le 1} X_t > a\Big) = \mathrm{P}\Big(\sup_{s>0} B_s - as > a\Big)$$

e ricavare funzione di ripartizione e densità della v.a. $\sup_{0\le t\le 1} X_t$.

[b) Si usa l'Esercizio 4.7.]

E5.10 (Inversione del tempo) Sia B un moto browniano e per $0 \le t \le 1$ poniamo

$$X_t = B_{1-t}.$$

Provare che $(X_t)_{t\le 1}$ è un processo di Markov non omogeneo rispetto alla sua filtrazione naturale e calcolare il generatore infinitesimale.

[Si usa il criterio dell'Esercizio 5.4 b). La funzione di transizione e quindi il generatore sono gli stessi del ponte browniano, (Esercizio 5.8). Diversa è però la legge iniziale.]

E5.11 Sia B un moto browniano .

a) Mostrare che, per ogni $a > 0$ e $T > 0$,

$$P(B_t \le at \text{ per ogni } t \le T) = 0.$$

b1) Mostrare che per ogni $a > 0$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$P(B_t \le a\sqrt{t} \text{ per ogni } t \le \varepsilon) > 0.$$

b2) Sia ϕ una funzione crescente tale che $\phi(0) = b > 0$. Mostrare che, per ogni $T > 0$,

$$P(B_t \le \phi(t) \text{ per ogni } t \le \varepsilon) > 0.$$

b3) Mostrare che, per ogni $a > 0$, $T > 0$,

$$P(B_t \le a\sqrt{t} \text{ per ogni } t \le T) > 0.$$

c) Mostrare che, per ogni $a > 0$,

$$P(B_t \le a\sqrt{t} \text{ per ogni } t \ge 0) = 0.$$

[a), b1), c) Si usa la legge del logaritmo iterato. b3) Si usa la proprietà di Markov.]

E5.12 Sia X un processo di Markov a valori in $\mathbb{R}^m$ associato a una funzione di transizione p tale che, per qualche $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ e $c > 0$, si abbia

$$\int |x-y|^\beta \, p(s,t,x,dy) \le c\,|s-t|^{1+\varepsilon}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^m$. Allora X ha una versione continua e il suo generatore è locale.

E5.13 a) Sia $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (X_t)_t, (P^x)_x)$ la realizzazione canonica del processo di Markov associato alla funzione di transizione (5.2). Allora P^0 è la misura di Wiener e P^x è l'immagine di P^0 tramite l'applicazione $t_x : \Omega \to \Omega$ definita da $t_x\omega(s) = \omega(s)+x$. In particolare la legge di $(X_t)_t$ rispetto a P^x coincide con quella di $(X_t + x)_t$ rispetto a P^0.

b) Sia $Y = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (Y_t)_t, (Q^x)_x)$ la realizzazione canonica di un processo di diffusione e supponiamo che Q^x coincida con l'immagine di Q^0 tramite t_x. Allora il generatore L di Y è a coefficienti costanti.

E5.14 (Un modo per trasformare un processo di Markov) a) Siano p una funzione di transizione omogenea nel tempo su uno spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$, $h : E \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile strettamente positiva e α un numero tali che

$$T_t h = e^{\alpha t} h \tag{5.38}$$

dove $(T_t)_t$ indica il semigruppo associato a p (vedi (5.24)). Mostrare che

$$p^h(t,x,A) = \frac{e^{-\alpha t}}{h(x)} \int_A h(y)\, p(t,x,dy)$$

è una funzione di transizione markoviana.

b) Supponiamo che valga la (5.38) e indichiamo con L e L^h rispettivamente i generatori dei semigruppi $(T_t)_t$ e $(T_t^h)_t$ (associato a p^h). Mostrare che se $f \in \mathcal{D}(L)$, allora $g = \frac{f}{h}$ appartiene a $\mathcal{D}(L^h)$ ed esprimere $L^h g$ in termini di Lf.

c) Supponiamo per di più $E = \mathbb{R}^m$ e che p sia la funzione di transizione markoviana di una diffusione di generatore

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{5.39}$$

Mostrare che, se h è due volte derivabile, $C_K^2 \subset \mathcal{D}(L^h)$ e calcolare $L^h g$ per $g \in C_K^2$.

d) Supponiamo che p sia la funzione di transizione di un moto browniano m-dimensionale (Vedi Esempio 5.3) e sia $h(x) = e^{\langle v,x\rangle}$, dove $v \in \mathbb{R}^m$ è un vettore fissato. Mostrare che vale la (5.38) per un α da determinare e calcolare $L^h g$ per $g \in C_K^2$.

E5.15 (Uccisione di un processo di Markov). Sia $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (X_t)_t, (P^x)_x)$ la realizzazione canonica di un processo di Markov omogeneo a valori nello spazio topologico E, associato alla funzione di transizione p. Siano $D \subset E$ un aperto, τ il tempo d'uscita da D.

a) Mostrare che, per $s \le t$, $1_{\{\tau > t\}} = 1_{\{\tau > t-s\}} \circ \theta_s \cdot 1_{\{\tau > s\}}$ e dedurre che, per ogni funzione boreliana limitata f,

$$E^x[f(X_t)1_{\{\tau>t\}} \mid \mathcal{F}_s] = 1_{\{\tau>s\}} E^{X_s}[f(X_{t-s})1_{\{\tau>t-s\}}] \qquad \text{q.c.}$$

b) Siano δ un punto isolato, $\tilde{D} = D \cup \{\delta\}$ e

$$\tilde{X}_t = \begin{cases} X_t & t < \tau \\ \delta & t \ge \tau \end{cases}$$

Provare che $\tilde{X} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (\tilde{X}_t)_t, (P^x)_x)$ è un processo di Markov e esprimerne la funzione di transizione, in termini del processo X.

c) Supponiamo che X sia un moto browniano m-dimensionale e che $D \subset \mathbb{R}^m$ sia un aperto; per $x \in D$, poniamo $d_x = \operatorname{dist}(x, \partial D)$. Provare che

$$P^x(\tau \le t) \le \frac{4m}{\sqrt{2\pi}} \int_{d_x/\sqrt{tm}}^{+\infty} e^{-z^2/2}\, dz. \tag{5.40}$$

Sia $\tilde{A}$ il generatore infinitesimale del processo $\tilde{X}$ ottenuto da X come in b) e indichiamo con $C_b^2(D)$ lo spazio delle funzioni due volte derivabili su $\mathbb{R}^m$ limitate e aventi supporto contenuto in D. Mostrare che, se $f \in C_b^2(D)$, allora $f \in \mathfrak{D}(\tilde{A})$. Quanto vale $\tilde{A}f$ se $f \in \mathfrak{D}(\tilde{A})$?

[b) Ricondurre la proprietà di Markov per $\tilde{X}$ a quella per X nella forma (5.15), usando la relazione

$$f(X_t)1_{\{\tau>t\}} = 1_{\{\tau>s\}}[f(X_{t-s})1_{\{\tau>t-s\}}] \circ \theta_s$$

e il fatto che se $f \in C_b(D)$ allora $f(\tilde{X}_t) = f(X_t)1_{\{\tau>t\}}$. L'equazione di Chapman-Kolmogorov segue dall'osservazione che conclude il paragrafo 5.1.

c) Sia Q_x il cubo $\{y; |y_i - x_i| < d_x/\sqrt{m}, i = 1, \dots, m\}$. Allora $Q_x \subset D$ e, se τ' è il tempo d'uscita da Q_x, $\mathrm{P}^x\{\tau \le t\} \le \mathrm{P}^x\{\tau' \le t\}$; quest'ultima quantità si valuta col principio di riflessione, Proposizione 2.17, applicato ad ogni coordinata. Se $f \in C_b^2(D)$ inoltre

$$\tfrac{1}{t}(\mathrm{E}^x[f(\tilde{X}_t)] - f(x)) = \tfrac{1}{t}(\mathrm{E}^x[f(X_t)] - f(x)) - \tfrac{1}{t}\mathrm{E}^x[f(X_t)1_{\{\tau\le t\}}]$$]

E5.16 Si dice che un processo di Markov X, a valori nello spazio metrico E e associato alla funzione di transizione p omogenea nel tempo, ammette una *misura invariante* o *stazionaria* μ se μ è una misura σ-finita su $(E, \mathcal{B}(E))$ tale che, per ogni funzione f boreliana limitata e a supporto compatto,

$$\int T_t f(x)\, d\mu(x) = \int f(x)\, d\mu(x)$$

per ogni t. Se per di più μ è una legge di probabilità, si dice che X ammette una *distribuzione* o *probabilità invariante* (o *stazionaria*).

a) Mostrare che, μ è una distribuzione stazionaria se e solo se, quando X_0 ha legge μ, la v.a. X_t ha legge μ per ogni $t \ge 0$.

b) Provare che il moto browniano ammette la misura di Lebesgue come misura invariante.

c) Mostrare che, se per ogni $x \in \mathbb{R}^m$ la funzione di transizione di X è tale che

$$\lim_{t\to+\infty} p(t, x, A) = 0 \tag{5.41}$$

per ogni boreliano limitato $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, allora X non può avere una probabilità invariante. Dedurre che il moto browniano non ha una probabilità invariante.

d) Provare che se X è di Feller ed esiste una probabilità μ su $\mathbb{R}^m$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}^m$,

$$\lim_{t\to+\infty} p(t, x, \cdot) = \mu$$

nel senso della convergenza stretta, allora μ è una distribuzione stazionaria.

Nota bibliografica 5

Tutti i testi citati nella nota bibliografica al capitolo 6 contengono una introduzione alla teoria dei Processi di Markov. Un maggiore interesse per la teoria astratta di questi processi si trova nel libro di Williams [Wil79] oltre che nei classici Dynkin [Dyn60], [Dyn65], Blumenthal e Getoor [BG68], Meyer [Mey67], Dellacherie e Meyer [DM87] e Sharpe [Sha88].

6
L'integrale stocastico

Sia $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (B_t)_t, \mathrm{P})$ un moto browniano continuo standard fissato una volta per tutte: l'obiettivo di questo capitolo è di dare un significato a espressioni del tipo

$$\int_0^T X_s(\omega)\, dB_s(\omega) \tag{6.1}$$

dove l'integrando $(X_s)_{0\le s\le T}$ è un processo che gode di proprietà da precisare. Come si è visto nel capitolo sul moto browniano, questa operazione non si può definire traiettoria per traiettoria perché la funzione $t \to B_t(\omega)$ non è a variazione finita q.c.

La (6.1) si chiamerà *integrale stocastico*. Questo tipo di calcolo sarà fondamentale per la costruzione e lo studio di nuovi processi.

6.1 Processi elementari

Definizione 6.1 *Indichiamo con $\Lambda_B^p([\alpha, \beta])$ lo spazio delle classi d'equivalenza di processi reali $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{\alpha\le t\le\beta}, (X_t)_{\alpha\le t\le\beta}, \mathrm{P})$, progressivamente misurabili e tali che*

i) $\mathrm{P}\big(\int_\alpha^\beta |X_s|^p\, ds < +\infty\big) = 1$.

Con $M_B^p([\alpha, \beta])$ indichiamo invece lo spazio delle classi d'equivalenza di processi progressivamente misurabili tali che

i') $\mathrm{E}\big(\int_\alpha^\beta |X_s|^p\, ds\big) < +\infty$.

$\Lambda_B^p([0, +\infty[)$ *(risp. $M_B^p([0, +\infty[)$) indica invece l'insieme dei processi $(X_t)_t$ tali che $(X_t)_{t\le T}$ sia in $\Lambda_B^p([0, T])$ (risp. $M_B^p([0, T])$) per ogni $T > 0$.*

Parlando di classi d'equivalenza s'intende che identifichiamo due processi X e X' se

$$\mathrm{P}\Big(\int_\alpha^\beta |X_s - X'_s|\, ds = 0\Big) = 1,$$

b) Sia Y una soluzione di

$$\begin{aligned} dY_t &= k\tanh(kY_t + c)\,dt + dB_t \\ Y_0 &= x \end{aligned} \tag{8.42}$$

Mostrare che la legge di Y_t è una mistura di leggi gaussiane, cioè della forma $\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$, dove $0 < \alpha < 1$ e μ_1, μ_2 sono leggi gaussiane di cui si determineranno media e varianza.
[b) Usare a) per calcolare la trasformata di Laplace di Y_t.]

Nota bibliografica 8

Per il contenuto di questo capitolo vale la bibliografia del capitolo 6.

Riguardo alle questioni di esistenza e unicità delle soluzioni di una EDS, segnaliamo alcuni sviluppi teorici, oramai non più tanto recenti, che non hanno trovato posto per motivi di spazio.

1) Soluzioni forti.
In Yamada-Watanabe [YW71] si dimostra che si possono indebolire l'ipotesi di regolarità sul coefficiente di diffusione.
In Zwonkin [Zwo74] viene costruita una trasformazione di Ω che muta una EDS in un'altra con $b = 0$. Ciò permette di indebolire le ipotesi di regolarità su b (in dimensione 1 basta che b sia misurabile e limitata) oltre a fornire altre utili applicazioni.

2) Soluzioni deboli.
I risultati più importanti sono quelli di Stroock-Varadhan [SV69a], [SV69b] oppure [SV79]. Essi dimostrano che l'esistenza debole e l'unicità in legge sono equivalenti all'esistenza e unicità del cosiddetto problema delle martingale, cioè al fatto che per ogni x, s esista una ed una sola probabilità $P^{x,s}$ su Ω tale che $P^{x,s}\{X_s = x\} = 1$ e che il processo H^f dell'Esercizio 5.6 sia una $P^{x,s}$-martingala. Partendo da questo punto di vista essi provano l'esistenza debole e l'unicità in legge con coefficienti solamente continui e limitati.

Nell'Esercizio 8.5 viene studiato il comportamento di un processo di diffusione quando il coefficiente di diffusione è "piccolo" e viene sviluppato il punto di vista che il processo così ottenuto è una perturbazione dell'equazione ordinaria che si ottiene quando il coefficiente di diffusione è nullo. Questo aspetto è stato molto studiato e costituisce un ampio capitolo della cosiddetta teoria delle grandi deviazioni. Ad essa sono stati dedicati oramai un certo numero di testi. Vedi il libro di Freidlin e Ventsel [FV83] e, per aspetti più generali della teoria delle grandi deviazioni, Dembo e Zeitouni [DZ97] e Azencott [Aze80].

9
Problemi alle derivate parziali associati a una diffusione

In questo capitolo vedremo che le medie di certi funzionali di un processo di diffusione, come funzione del dato iniziale, sono soluzione di problemi alle derivate parziali. Sono formule molto utili da due punti di vista. Intanto per lo studio e una migliore comprensione delle proprietà delle soluzioni di questi problemi. Inoltre, in alcuni casi, esse permettono di calcolare la soluzione del problema alle derivate parziali (calcolando esplicitamente la media del funzionale corrispondente) oppure la media del funzionale (risolvendo esplicitamente il problema alle derivate parziali).

9.1 Rappresentazione delle soluzioni del problema di Dirichlet

Iniziamo con un risultato preliminare. Sia ξ la soluzione dell'EDS

$$\xi_t = x + \int_s^t b(\xi_u, u)\,du + \int_s^t \sigma(\xi_u, u)\,dB_u$$

dove b e σ verificano le Ipotesi (A'). Sia D un aperto *limitato* contenente x. Vedremo ora che, sotto opportune ipotesi, il tempo d'uscita da D, $\tau = \inf\{t; \xi_t(\omega) \notin D\}$, è una v.a. integrabile. Sia al solito

$$L_t = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

dove $a = \sigma\sigma^*$. Consideriamo le ipotesi seguenti.

B1) Esiste una funzione $\Phi \in C^{2,1}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+)$ a valori in $\mathbb{R}^+$ e tale che

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + L_t\Phi \le -1.$$

B_2) Esistono due costanti $\lambda > 0$, $c > 0$ e un indice i, $1 \le i \le m$, tali che

$$a_{ii}(x,t) \ge \lambda, \qquad b_i(x,t) \ge -c$$

per ogni $x \in D$, $t \ge 0$.

B_3) Su $D \times \mathbb{R}^+$, b è limitata ed il campo di matrici a è uniformemente ellittico, cioè tale che $\langle a(x,t)z, z\rangle \ge \lambda |z|^2$ per qualche $\lambda > 0$ e per ogni $(x,t) \in \bar{D} \times \mathbb{R}^+$, $z \in \mathbb{R}^m$.

Proposizione 9.1 $B_3) \Rightarrow B_2) \Rightarrow B_1)$.

Dimostrazione. $B_3) \Rightarrow B_2)$ Si ha $a_{ii}(x,t) = \langle a(x,t)e_i, e_i\rangle \ge \lambda$, dove e_i indica il vettore unitario nella direzione i-esima.

$B_2) \Rightarrow B_1)$ Poniamo $\Phi(x,t) = \beta(\mathrm{e}^{\alpha R} - \mathrm{e}^{\alpha x_i})$, dove R è il raggio di una sfera contenente D, e α un numero ≥ 0 che preciseremo poi (Φ dunque non dipende da t); allora $\Phi > 0$ su D e

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L_t\Phi &= -\beta \mathrm{e}^{\alpha x_i}(\alpha^2 a_{ii}(x,t) + \alpha b_i(x,t)) \le \\ &\le -\beta \mathrm{e}^{\alpha x_i}(\alpha^2\lambda - \alpha c) \le -\alpha\beta \mathrm{e}^{-\alpha R}(\alpha\lambda - c)\end{aligned}$$

e l'ultimo termine si può rendere ≤ -1, scegliendo α e β abbastanza grandi.

Proposizione 9.2 *Se B_1) è verificata,* $\mathrm{E}(\tau) < +\infty$ *per ogni* $(x,s) \in D \times \mathbb{R}^+$.

Dimostrazione. Per la formula di Ito, per ogni $t \ge s$ si ha q.c.

$$\begin{aligned}&\Phi(\xi_{t\wedge\tau}, t\wedge\tau) - \Phi(x,t) = \\ &= \int_s^{t\wedge\tau}\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial u} + L_u\Phi\Big)(\xi_u, u)\,du + \int_s^{t\wedge\tau}\sum_{i,h}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(\xi_u,u)\sigma_{ih}(\xi_u,u)\,dB_h(u).\end{aligned}$$

Poiché σ e le derivate prime di Φ sono limitate su $D \times [s,t]$, l'ultimo termine è una martingala ed ha media nulla; dunque, per ogni $t > s$,

$$\mathrm{E}[\Phi(\xi_{t\wedge\tau}, t\wedge\tau)] - \Phi(x,s) = \mathrm{E}\Big(\int_s^{t\wedge\tau}\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial u} + L_u\Phi\Big)(\xi_u,u)\,du\Big) \le -\mathrm{E}(t\wedge\tau).$$

Poiché Φ è positiva su $D \times \mathbb{R}^+$, $\Phi(x,s) \ge \mathrm{E}(t\wedge\tau)$. Basta ora prendere il limite per $t \to +\infty$ e applicare il lemma di Fatou.

Supponiamo ora che l'aperto D sia limitato, connesso e di frontiera C^2; sia

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

un operatore differenziale su $\bar{D}$ tale che

a) L è uniformemente ellittico su $\bar{D}$, cioè $\langle a(x)z, z\rangle \ge \lambda|z|^2$ per qualche $\lambda > 0$ e per ogni $x \in \bar{D}$, $z \in \mathbb{R}^m$;

b) a e b sono lipschitziane su $\bar{D}$.

È ben noto il seguente teorema di esistenza e unicità (vedi [Fri64], [Fri75]).

Teorema 9.3 *Siano ϕ una funzione continua su ∂D, c e f funzioni hölderiane $\bar{D} \to \mathbb{R}$ con $c \ge 0$. Allora, se L soddisfa alle condizioni a) e b) precedenti, esiste una unica funzione $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ tale che*

$$\begin{cases} Lu - cu = f & \text{su } D \\ u_{|\partial D} = \phi. \end{cases} \tag{9.1}$$

Per la Proposizione 8.24 esiste un campo di matrici σ lipschitziano su $\bar{D}$ tale che $a = \sigma\sigma^*$. Si possono allora prolungare σ e b a tutto $\mathbb{R}^m$ mantenendo soddisfatte le Ipotesi (A). Sia $(\mathscr{C}, \mathscr{M}, (\mathscr{M}_t)_{t\ge0}, (X_t)_{t\ge0}, (\mathrm{P}^x)_x)$ la diffusione canonica associata alla EDS di coefficienti b e σ. Sappiamo che è una diffusione di generatore infinitesimale L.

Se $Z_t = \mathrm{e}^{-\int_0^t c(X_s)\,ds}$, allora $dZ_t = -c(X_t)Z_t\,dt$. Se v è una funzione $C^2(\mathbb{R}^m)$ limitata, per la formula di Ito si ha, P^x-q.c. per ogni x,

$$\begin{aligned} Z_t v(X_t) &= v(x) + \int_0^t v(X_s)\,dZ_s + \int_0^t \sum_{i=1}^m \frac{\partial v}{\partial x_i}(X_s)Z_s\,dX_s^i + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(X_s)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}(X_s)Z_s\,ds = \\ &= \int_0^t (Lv(X_s) - c(X_s)v(X_s))Z_s\,ds + \int_0^t \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial v}{\partial x_i}(X_s)Z_s\sigma_{ij}(X_s)\,dB_j(s).\end{aligned} \tag{9.2}$$

Se fosse possibile applicare la (9.2) a $v = u$ dove u è data dal Teorema 9.3 e se l'integrale stocastico avesse media nulla, avremmo immediatamente, per $t = \tau$,

$$u(x) = \mathrm{E}^x[Z_\tau\phi(X_\tau)] - \mathrm{E}^x\Big[\int_0^\tau f(X_s)Z_s\,ds\Big],$$

che è la formula di rappresentazione che stiamo cercando. Ma u è C^2 solo su D e non è ovvio che la si possa prolungare a tutto $\mathbb{R}^m$. Le argomentazioni seguenti servono a superare queste difficoltà.

Sia, per ogni $\varepsilon > 0$, D_ε un aperto regolare tale che $\bar{D}_\varepsilon \subset D$ e $\mathrm{dist}(\partial D_\varepsilon, \partial D) \le \varepsilon$; sia τ_ε il tempo d'uscita da D_ε: evidentemente $\tau_\varepsilon \le \tau$ e inoltre $\tau < +\infty$ per le Proposizioni 9.1 e 9.2; poiché le traiettorie sono continue, τ_ε converge a τ q.c. crescendo per $\varepsilon \searrow 0$.

Sia u_ε una funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^m)$ limitata e che coincida con u su D_ε e scriviamo la (9.2) per $v = u_\varepsilon$ e con D_ε al posto di D. Poiché le derivate di u su $\bar{D}_\varepsilon$ sono limitate l'integrale stocastico ha media nulla e poiché u coincide con u_ε su D si ricava, prendendo la speranza matematica per $x \in D_\varepsilon$,

$$E^x[u(X_{t\wedge\tau_\varepsilon})Z_{t\wedge\tau_\varepsilon}] = u(x) + E^x\Big(\int_0^{t\wedge\tau_\varepsilon} f(X_s)Z_s\,ds\Big).$$

Al limite per $\varepsilon \searrow 0$ si ottiene dunque

$$E^x[u(X_{t\wedge\tau})Z_{t\wedge\tau}] = u(x) + E^x\Big[\int_0^{t\wedge\tau} Z_s f(X_s)\,ds\Big].$$

Prendiamo il limite per $t \to +\infty$; poiché $Z_s \le 1$ per ogni s,

$$\Big|\int_0^{t\wedge\tau} Z_s f(X_s)\,ds\Big| \le \tau\|f\|_\infty.$$

Poiché τ è integrabile per le Proposizioni 9.1 e 9.2, per il Teorema di Lebesgue,

$$E^x[u(X_\tau)Z_\tau] = u(x) + E^x\Big[\int_0^{\tau} Z_s f(X_s)\,ds\Big].$$

Infine, poiché $X_\tau \in \partial D$,

(9.3) $$u(x) = E^x[\phi(X_\tau)Z_\tau] - E^x\Big[\int_0^{\tau} Z_s f(X_s)\,ds\Big].$$

Abbiamo quindi trovato una rappresentazione della soluzione u di (9.1) in termini della diffusione associata a L. Nel caso $c = 0$, $f = 0$, l'espressione diviene

(9.4) $$u(x) = E^x[\phi(X_\tau)].$$

Come osservato all'inizio del capitolo, formule come la (9.3) o (9.4) sono interessanti sia per calcolare medie di funzionali di processi di diffusione, come, per esempio, i termini a destra nelle (9.3) e (9.4), riconducendone il calcolo alla risoluzione del problema (9.1), sia per ricavare informazioni sulla soluzione u di (9.1). Ad esempio osserviamo che nella derivazione della (9.3) ci siamo serviti solo dell'esistenza di u. Il calcolo appena fatto quindi fornisce una dimostrazione dell'unicità della soluzione nel Teorema 9.3.

Si chiama *nucleo di Poisson* dell'operatore L su D una famiglia $(\Pi(x,\cdot))_{x\in D}$ di misure su ∂D, tale che, per ogni funzione ϕ continua su ∂D, la soluzione di

(9.5) $$\begin{cases} Lu = 0 & \text{su } D \\ u_{|\partial D} = \phi \end{cases}$$

sia data da

$$u(x) = \int_{\partial D} \phi(y)\,\Pi(x,dy).$$

La (9.4) afferma che, nelle ipotesi del Teorema 9.3, il nucleo di Poisson esiste sempre e $\Pi(x,\cdot)$ è la legge di X_τ rispetto a P^x (cioè la legge di arrivo in ∂D della diffusione X uscente da $x \in D$). Questa identificazione permette di determinare la legge di arrivo in quei casi in cui il nucleo di Poisson è conosciuto e viceversa.

Esempio 9.4 Siano $L = \frac{1}{2}\Delta$ e B_R la sfera aperta di centro 0 e raggio R in $\mathbb{R}^m$, $m \ge 1$; siano $\sigma(dy)$ l'elemento di superficie di ∂B_R, ω_m la misura della superficie della sfera di raggio 1 in $\mathbb{R}^m$. Allora è noto che, per $y \in \partial B_R$, $x \in B_R$, se

$$N_R(x,y) = \frac{1}{R\omega_m}\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^m},$$

allora il nucleo di Poisson di $\frac{1}{2}\Delta$ su B_R è dato da

(9.6) $$\Pi(x,dy) = N_R(x,y)\,\sigma(dy).$$

Quindi la (9.6) dà la legge di arrivo su ∂B_R per un moto browniano uscente da $x \in B_R$.

9.2 Equazioni paraboliche

Una formula di rappresentazione si può ottenere in modo del tutto simile anche per il problema di Cauchy-Dirichlet. Siano D un aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^m$ di frontiera C^2, $Q = D \times [0,T[$ e

(9.7) $$L_t = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

un operatore differenziale su $\bar{Q}$ tale che

a) $\langle a(x,t)\,z, z\rangle \ge \lambda|z|^2$ dove $\lambda > 0$ per ogni $(x,t) \in Q$, $z \in \mathbb{R}^m$;

b) a e b siano lipschitziane in Q.

Vale allora il seguente risultato di esistenza e unicità ([Fri64], [Fri75]).

Teorema 9.5 *Siano ϕ una funzione continua su $\bar{D}$, g una funzione continua su $\partial D \times [0,T]$ tale che $g(x,T) = \phi(x)$ se $x \in \partial D$; siano c e f funzioni hölderiane $\bar{Q} \to \mathbb{R}$. Allora, nelle ipotesi a) e b) precedenti, esiste una unica funzione $u \in C^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$ tale che*

(9.8) $$\begin{cases} L_t u - cu + \dfrac{\partial u}{\partial t} = f & \text{su } Q \\ u(x,T) = \phi(x) & \text{su } D \\ u(x,t) = g(x,t) & \text{su } \partial D \times [0,T] \end{cases}$$

Per la Proposizione 8.24 esiste un campo di matrici σ lipschitziano su $\bar{Q}$ tale che $\sigma\sigma^* = a$; inoltre è noto che i coefficienti σ e b si possono prolungare a $\mathbb{R}^m \times [0, T]$ conservando lipschitzianità e limitatezza. Sia $(\mathscr{C}, \mathscr{M}, (\mathscr{M}_t^s)_{t\geq s}, (X_t)_t, (\mathrm{P}^{x,s})_{x,s})$ la diffusione canonica associata alla EDS di coefficienti b e σ.

Teorema 9.6 *Nelle ipotesi del Teorema 9.5, vale la formula di rappresentazione*

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = {} & \mathrm{E}^{x,t}\Big[g(X_\tau, \tau)\,\mathrm{e}^{-\int_t^\tau c(X_s,s)\,ds} 1_{\{\tau<T\}}\Big] + \\
& + \mathrm{E}^{x,t}\Big[\phi(X_T)\,\mathrm{e}^{-\int_t^T c(X_s,s)\,ds} 1_{\{\tau\geq T\}}\Big] - \\
& - \mathrm{E}^{x,t}\Big[\int_t^{\tau\wedge T} f(X_s, s)\,\mathrm{e}^{-\int_t^s c(X_u,u)\,du}\,ds\Big]
\end{aligned}
\tag{9.9}
$$

dove τ è il tempo d'uscita da D.

Dimostrazione. Il ragionamento è simile a quello usato per la dimostrazione della (9.3): si tratterà di applicare la formula di Ito al processo $Y_s = u_\varepsilon(X_s, s)\,\mathrm{e}^{-\int_t^s c(X_r,r)\,dr}$, dove u_ε approssima u in modo simile a quello usato per ottenere la (9.3).

Nel caso particolare $g = 0$, $c = 0$, $f = 0$ la (9.9) diviene

$$
u(x,t) = \mathrm{E}^{x,t}[\phi(X_T)1_{\{\tau\geq T\}}].
$$

È bene però ricordare che, per dedurre la relazione precedente dal Teorema 9.6, occorre supporre che ϕ si annulli su ∂D. Se b, σ, f, g, c non dipendono da t allora posto $v(x,t) = u(x, T-t)$, v è soluzione di

$$
\begin{cases}
Lv - \dfrac{\partial v}{\partial t} - cv = f(x) & \text{su } Q \\
v(x, 0) = \phi(x) & \text{su } D \\
v(x,t) = g(x) & \text{su } \partial D \times [0,T]
\end{cases}
$$

9.3 La formula di Feynman-Kac, l'equazione backward

In questo paragrafo studieremo formule di rappresentazione come quella del Teorema 9.6, per il dominio $\mathbb{R}^m \times [0, T]$. Di queste vedremo delle applicazioni nel prossimo capitolo. Tutte le difficoltà naturalmente provengono dal fatto che $\mathbb{R}^m$ non è limitato.

Consideriamo due funzioni reali ϕ, f, continue e definite rispettivamente su $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^m \times [0, T]$. Consideriamo le due ipotesi

$$
|\phi(x)| \leq M(1+|x|^\lambda), \quad |f(x,t)| \leq M(1+|x|^\lambda) \quad (x,t) \in \mathbb{R}^m \times [0,T]
\tag{9.10}
$$

per qualche $\lambda \geq 0$ (condizione di crescita polinomiale), oppure

$$
\phi \geq 0, \qquad f \geq 0.
\tag{9.11}
$$

Nel seguito indichiamo con L_t un operatore differenziale su $\mathbb{R}^m \times [0, T[$, come in (9.7) e $(\mathscr{C}, \mathscr{M}, (\mathscr{M}_t^s)_{t\geq s}, (X_t)_t, (\mathrm{P}^{x,s})_{x,s})$ la diffusione canonica associata.

Teorema 9.7 *Siano $c : \mathbb{R}^m \times [0, T] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata inferiormente ($c(x,t) \geq -K$) e w una funzione $C^{2,1}(\mathbb{R}^m \times [0, T[)$, che sia continua su $\mathbb{R}^m \times [0, T]$ e soluzione del problema*

$$
\begin{cases}
L_t w + \dfrac{\partial w}{\partial t} - cw = f & \text{su } \mathbb{R}^m \times [0, T[\\
w(x, T) = \phi(x)
\end{cases}
\tag{9.12}
$$

Supponiamo che L_t soddisfi alle Ipotesi (A') (vedi p. 169) e che le funzioni ϕ, f, oltre a essere continue, soddisfino a una delle ipotesi (9.10) oppure (9.11). Supponiamo, per di più che anche w sia a crescita polinomiale, cioè esistano M_1, $\mu > 0$ tali che

$$
|w(x,t)| \leq M_1(1+|x|^\mu)
\tag{9.13}
$$

per ogni $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^m$. Allora vale la formula di rappresentazione

$$
w(x,t) = \mathrm{E}^{x,t}\big[\phi(X_T)\,\mathrm{e}^{-\int_t^T c(X_s,s)\,ds}\big] - \mathrm{E}^{x,t}\Big[\int_t^T f(X_s,s)\,\mathrm{e}^{-\int_t^s c(X_u,u)\,du}\,ds\Big]
\tag{9.14}
$$

Dimostrazione. Sia τ_R il tempo d'uscita di X dalla sfera di raggio R. Allora, per il Teorema 9.6 applicato a $D = B_R$, si ha, per ogni $(x,t) \in B_R \times [0, T[$,

$$
\begin{aligned}
w(X_t, t) = & - \mathrm{E}^{x,t}\Big[\int_t^{T\wedge\tau_R} f(X_s,s)\,\mathrm{e}^{-\int_t^s c(X_u,u)\,du}\,ds\Big] + \\
& + \mathrm{E}^{x,t}\big[w(X_{\tau_R}, \tau_R)\,\mathrm{e}^{-\int_t^{\tau_R} c(X_u,u)\,du} 1_{\{\tau_R<T\}}\big] + \\
& + \mathrm{E}^{x,t}\big[\phi(X_T)\,\mathrm{e}^{-\int_t^T c(X_u,u)\,du} 1_{\{\tau_R\geq T\}}\big] = \\
= & I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}
\tag{9.15}
$$

Cominciamo col supporre verificate le (9.10). Per la Proposizione 8.15 sappiamo che

$$
\mathrm{E}^{x,t}\Big[\max_{t\leq u\leq T} |X_u|^q\Big] \leq C_q(1+|x|^q)
\tag{9.16}
$$

per ogni $q \geq 2$, dove C non dipende da x. Per la disuguaglianza di Markov, si ha

$$
\mathrm{P}^{x,t}(\tau_R \leq T) = \mathrm{P}^{x,t}\Big(\max_{t\leq u\leq T} |X_u| \geq R\Big) \leq C_q R^{-q}(1+|x|^q)
\tag{9.17}
$$

In quest'ultimo caso, indichiamo con Q la versione regolare della probabilità condizionale su $\sigma(X)$. Gli eventi di $\sigma(X)$ sono della forma $X^{-1}(A)$, $A \in \mathcal{B}(E)$ ed è facile vedere che, se poniamo

$$\mu(\omega, A) = Q(\omega, \{X \in A\}) = \mathrm{P}(X \in A \mid \mathcal{D})$$

per ogni $A \in \mathcal{B}(E)$, allora, per ogni $\omega \in \Omega$, $\mu(\omega, \cdot)$ definisce una probabilità su $(E, \mathcal{B}(E))$. μ si chiama la *distribuzione condizionale di X dato $\mathcal{D}$*. Si tratta di una applicazione $\mu : \Omega \times \mathcal{B}(E) \to \mathbb{R}$ tale che

a) $\omega \to \mu(\omega, A)$ è $\mathcal{D}$-misurabile per ogni $A \in \mathcal{B}(E)$

b) $A \to \mu(\omega, A)$ è una probabilità su $\mathcal{B}(E)$ per ogni $\omega \in \Omega$.

Esercizi

E11.1 Nelle librerie FORTRAN in uso fino agli anni '70 (ma anche dopo ...), per generare un numero aleatorio con distribuzione normale si usava la procedura seguente. Se $X_1, \dots, X_{12}$ sono v.a. indipendenti e uniformi su $[0, 1]$, allora il numero

$$W = X_1 + \ldots + X_{12} - 6 \tag{11.12}$$

è approssimativamente $N(0, 1)$.

a) Sapreste dare una giustificazione di questa affermazione?

b) Sia Z una v.a. $N(0, 1)$. Quanto vale $\mathrm{E}(Z^4)$? Quanto vale $\mathrm{E}(W^4)$ per la v.a. data dalla (11.12)? Cosa pensate di questa procedura?

E11.2 Sia $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) \to (E, \mathcal{E})$ una v.a. di legge μ, che supponiamo regolare su $\mathcal{E}$ rispetto a una classe compatta $\mathcal{K}$. Mostrare che la σ-algebra $\sigma(X)$ contiene una classe compatta rispetto alla quale P è regolare su $\sigma(X)$. Inoltre se $\mathcal{E}$ è numerabilmente generata anche $\sigma(X)$ lo è. In particolare, se E è uno spazio metrico completo separabile e $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$, le ipotesi del Teorema 11.15 sono verificate per $\mathcal{G} = \sigma(X)$.
[Ricordare che $\sigma(X)$ è costituita dagli eventi della forma $X^{-1}(A)$ per $A \in \mathcal{E}$.]

Nota bibliografica 11

La simulazione di variabili aleatorie e di processi stocastici è un argomento di studio in grande sviluppo. Si veda Devroye [Dev86] e, per la parte più specifica ai processi, Bouleau e Lepingle [BL94], Kloeden e Platen [KP92] e Lapeyre, Pardoux e Sentis [LPS98]. Per la parte sulle versioni regolari della probabilità condizionale, vedi anche Breiman [Bre92] capitolo 4, Dellacherie-Meyer [DM75] p. 125, Neveu [Nev64] paragrafo V.4, Williams [Wil79] paragrafo II.4.

12 Soluzioni

S0.1 In un senso l'implicazione è evidente: se X e Y hanno la stessa legge μ, allora hanno anche la stessa f.r., poiché

$$F(t) = \mathrm{P}(X \le t) = \mu(]-\infty, t]).$$

Viceversa se X e Y hanno la stessa f.r. F, allora, indicando con μ_X e μ_Y le leggi rispettive e se $a < b$,

$$\mu_X(]a, b]) = \mathrm{P}(a < X \le b) = \mathrm{P}(X \le b) - \mathrm{P}(X \le a) = F(b) - F(a).$$

Ripetendo lo stesso argomento per μ_Y, si vede che μ_X e μ_Y coincidono sugli intervalli semiaperti $]a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. La famiglia $\mathcal{C}$ costituita da questi intervalli semiaperti è stabile per l'intersezione finita (si vede subito) e genera la σ-algebra boreliana. Infatti una σ-algebra contenente $\mathcal{C}$ contiene necessariamente gl'intervalli aperti $]a, b[$ (che sono intersezione degli intervalli semiaperti $]a, b + \frac{1}{n}]$) e quindi tutti gli aperti. Per il criterio di Carathéodory, Teorema 0.4, μ_X e μ_Y coincidono su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

S0.2 a) Si tratta di applicazioni immediate delle definizioni. Se $x > 0$

$$F(x) = \mathrm{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \lambda \int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x},$$

mentre la stessa formula dà $F(x) = 0$ se $x < 0$ (f è nulla sui reali negativi). Con un po' di pazienza, integrando per parti, si trova

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \lambda \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}$$

e $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2=\frac{1}{\lambda}$.

b) Si ha immediatamente

$$\mathrm{E}(U)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{E}(U^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$$

e $\mathrm{Var}(U)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$.

c) Se $t>0$ si ha

$$F_Z(t)=\mathrm{P}(-\tfrac{1}{\lambda}\log U\le t)=\mathrm{P}(U\ge \mathrm{e}^{-\lambda t})=\int_{\mathrm{e}^{-\lambda t}}^1 dx=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

mentre $F_Z(t)=0$ per $t<0$. Dunque Z ha la stessa f.r. di una legge esponenziale di parametro λ e, per l'Esercizio 0.1, ha questa legge.

S0.3 a) Indichiamo con μ la legge di X. Per la regola d'integrazione rispetto a una legge immagine, Proposizione 0.1, e per il Teorema di Fubini si ha

$$\mathrm{E}(f(X))=\int_0^{+\infty} f(x)\,d\mu(x)=\int_0^{+\infty} d\mu(x)\Big(f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt\Big)=$$
$$=f(0)+\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt\int_t^{+\infty} d\mu(x)=f(0)+\int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{P}(X\ge t)\,dt.$$

b) Imitando il Teorema di Fubini, si ha

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{P}(X=n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}(X=n)\sum_{k=1}^{n}1=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\mathrm{P}(X=n)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}(X\ge k).$$

S0.4 a) C è chiaramente simmetrica. Supponiamo per semplicità che X sia centrata (altrimenti si passa a considerare la v.a. $X-\mathrm{E}(X)$ che è centrata ed ha la stessa matrice di covarianza). Sia $\xi\in\mathbb{R}^m$, allora

$$\langle C\xi,\xi\rangle=\sum_{i,j=1}^m c_{ij}\xi_i\xi_j=\sum_{i,j=1}^m \mathrm{E}(\xi_i X_i\xi_j X_j)=\mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^m \xi_i X_i\sum_{j=1}^m \xi_j X_j\Big)= \tag{12.1}$$
$$=\mathrm{E}(\langle\xi,X\rangle^2)\ge 0$$

e dunque C è semidefinita positiva. Come conseguenza della (12.1), se x è un vettore del nucleo di C, allora

$$0=\langle Cx,x\rangle=\mathrm{E}(\langle x,X\rangle^2)$$

e dunque $\langle x,X\rangle^2=0$ q.c., cioè X è ortogonale a x q.c. Poiché C è simmetrica, la sua immagine coincide con il sottospazio formato dai vettori che sono ortogonali al nucleo: un vettore z si trova in $\mathrm{Im}\,C$ se e solo se $\langle z,x\rangle=0$ per ogni vettore x tale che $Cx=0$. Ovvero, se $\xi_1,\dots,\xi_k$, $k\le m$ è una base del nucleo di C, se e solo se $\langle z,\xi_i\rangle=0$ per $i=1,\dots,k$. In conclusione

$$\{X\in\mathrm{Im}\,C\}=\{\langle X,\xi_1\rangle=0\}\cap\ldots\cap\{\langle X,\xi_k\rangle=0\}$$

e dunque l'evento $\{X\in\mathrm{Im}\,C\}$ ha probabilità 1 come intersezione di un numero finito di eventi di probabilità 1.

b) Se C non è invertibile, $\mathrm{Im}\,C$ è un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^m$. La v.a. $X-\mathrm{E}(X)$ è centrata ed ha la stessa matrice di covarianza e, come abbiamo visto, $X-\mathrm{E}(X)\in\mathrm{Im}\,C$ con probabilità 1. Se X avesse densità, diciamo f, allora sarebbe

$$\mathrm{P}(X\in\mathrm{Im}\,C+\mathrm{E}(X))=\int_{\mathrm{Im}\,C+\mathrm{E}(X)} f(x)\,dx.$$

Ma l'integrale a destra è uguale a 0 perché l'iperpiano $\mathrm{Im}\,C+\mathrm{E}(X)$ ha misura di Lebesgue 0. Ciò è assurdo, poiché $\mathrm{P}(X\in\mathrm{Im}\,C+\mathrm{E}(X))=1$.

S0.5 È noto (anche se non abbastanza . . .) il fatto elementare seguente: una successione di numeri reali $(a_n)_n$ converge a ℓ se e solo se da ogni sottosuccessione di $(a_n)_n$ si può estrarre una ulteriore sottosuccessione convergente a ℓ. Dunque si ha $\|X_n-X\|_p\to 0$ per $n\to\infty$ se e solo se da ogni sottosuccessione di $(\|X_n-X\|_p)_n$ si può estrarre un'ulteriore sottosuccessione convergente a 0. Per la convergenza in probabilità il ragionamento è simile.

Per la convergenza q.c. questa argomentazione non si può ripetere, perché dire che una sottosuccessione converge q.c. significa che esiste un insieme trascurabile N *dipendente dalla sottosuccessione* al di fuori del quale si ha $X_{n_k}\to_{k\to\infty} X$. Il fatto elementare ricordato all'inizio permette quindi di dire che la successione $(X_n)_n$ converge al di fuori della riunione di tutti questi eventi trascurabili. Poiché l'insieme delle sottosuccessioni di una successione data ha cardinalità più che numerabile, la riunione di tutti questi eventi trascurabili può avere probabilità positiva.

Il paragrafo precedente spiega perché il ragionamento valido per la convergenza in probabilità e in L^p non si applica alla convergenza q.c. Per mostrare che la proprietà in questione non vale per la convergenza q.c. occorre però produrre un controesempio. Lasciamo questo compito al lettore dotato d'immaginazione. In ogni caso un controesempio è dato da una qualunque successione di v.a. che converga in probabilità ma non q.c. Per la Proposizione 0.7 infatti da essa si può estrarre una sottosuccessione convergente q.c.; quindi, se la proprietà in questione fosse vera per la convergenza q.c., ogni successione convergente in probabilità sarebbe convergente anche q.c.

S0.6 Da $(X_n)_n$ si può estrarre una sottosuccessione $(X_{n_k})_k$ convergente a X q.c. (Proposizione 0.7). Per questa sottosuccessione è valido il Teorema di Lebesgue e dunque

$E(X_{n_k}) \to_{k\to\infty} E(X)$. Anzi si può affermare che da ogni sottosuccessione di $(X_n)_n$ si può estrarre una ulteriore sottosuccessione di v.a. le cui speranze matematiche convergono a quella di X. Basta ora applicare il risultato elementare richiamato all'inizio della soluzione dell'Esercizio 0.5.

S0.7 $\mu * \nu$ è la legge della v.a. $X+Y$, dove X e Y sono v.a. indipendenti di legge μ e ν rispettivamente. Dunque

$$(\mu * \nu)\hat{}(\theta) = E(e^{i\langle\theta, X+Y\rangle}) = E(e^{i\langle\theta,X\rangle}e^{i\langle\theta,Y\rangle}) \underset{\uparrow}{=} E(e^{i\langle\theta,X\rangle})E(e^{i\langle\theta,Y\rangle}) = \hat{\mu}(\theta)\hat{\nu}(\theta)$$

dove l'uguaglianza indicata dalla freccia segue dalla Proposizione 0.5, ricordando che X e Y sono indipendenti.

Se $X = (X_1, \dots, X_m)$ è una v.a. m-dimensionale di legge μ, allora la k-esima marginale, μ_k, non è altro che la legge di X_k. Dunque, se indichiamo con $\tilde{\theta}$ il vettore di dimensione m di tutti zeri, tranne il valore θ al k-esimo posto, allora

$$\hat{\mu}_k(\theta) = E(e^{i\theta X_k}) = E(e^{i\langle\tilde{\theta},X\rangle}) = \hat{\mu}(\tilde{\theta}).$$

S0.8 Il vettore $(X, X+Y)$ si può ottenere come trasformazione di (X, Y) tramite l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché (X, Y) ha legge $N(0, I)$, per la proprietà delle leggi normali rispetto alle trasformazioni lineari-affini vista nel paragrafo 0.7, si vede che $(X, X+Y)$ ha legge normale di media nulla e matrice di covarianza

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Analogamente il vettore $Z = (X, \sqrt{2}X)$ si ottiene da X mediante la trasformazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

che permette di concludere che Z è normale di matrice di covarianza AA^*. Oppure si sarebbe potuto calcolare direttamente la funzione caratteristica di Z: se $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, allora

$$E[e^{i\langle\theta,Z\rangle}] = E[e^{i(\theta_1+\sqrt{2}\theta_2)X}] = \exp\Big(-\frac{1}{2}(\theta_1+\sqrt{2}\theta_2)^2\Big) =$$
$$= \exp\Big(-\frac{1}{2}(\theta_1^2 + 2\theta_2^2 + 2\sqrt{2}\theta_1\theta_2)\Big)$$

da cui si riconosce facilmente che si tratta di una legge normale di media nulla e di matrice di covarianza

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

In particolare i due vettori $(X, X+Y)$ e $(X, \sqrt{2}X)$ hanno le stesse leggi marginali (normali centrate di varianza 1 e 2 rispettivamente) ma diverse leggi congiunte (le matrici di covarianza sono diverse).

S0.9 Osserviamo innanzitutto che la v.a. $(X_1 - X_2, X_1 + X_2)$ è gaussiana, essendo ottenuta da $X = (X_1, X_2)$ (che è gaussiana) mediante la trasformazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Basta a questo punto verificare che la matrice di covarianza, Γ, di $(X_1 - X_2, X_1 + X_2)$ è diagonale: ciò implicherà che le due v.a. $(X_1 - X_2, X_1 + X_2)$ sono non correlate e ciò, per le v.a. congiuntamente gaussiane, implica l'indipendenza. Tenendo conto che (X_1, X_2) ha matrice di covarianza uguale all'identità, usando la (0.10) si trova

$$\Gamma = AA^* = 2I.$$

Lo stesso argomento si applica alle v.a. $Y_2 = \frac{1}{2}X_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}X_2$ e $Y_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}X_2$. Il vettore $Y = (Y_1, Y_2)$ è ottenuto da X mediante la trasformazione lineare di matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{12.2}$$

Dunque Y ha matrice di covarianza $AA^* = I$ e anche in questo caso Y_1 e Y_2 sono indipendenti. Anzi Y ha la stessa legge, $N(0, I)$, di X.

Guardando meglio questo calcolo, abbiamo anzi provato una proprietà più generale: se $X \sim N(0, I)$, allora, se A è una matrice ortogonale (cioè tale che $A^{-1} = A^*$), AX ha ancora legge $N(0, I)$. La matrice A in (12.2) è quella di una rotazione del piano di $\frac{\pi}{3}$.

S0.10 Se $X \sim N(0, I)$, allora

$$E(e^{\langle\theta,X\rangle}) = (2\pi)^{-m/2}\int_{\mathbb{R}^m} e^{\langle\theta,x\rangle}e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\,dx = (2\pi)^{-m/2}e^{\frac{1}{2}|\theta|^2}\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{1}{2}|x-\theta|^2}\,dx =$$
$$= (2\pi)^{-m/2}e^{\frac{1}{2}|\theta|^2}\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{1}{2}|y|^2}\,dy = e^{\frac{1}{2}|\theta|^2}.$$

dato che l'integrale vale $(2\pi)^{m/2}$, ricordando l'espressione della densità $N(0, I)$ (vedi (0.15)). Se invece $X \sim N(b, \Gamma)$, allora sappiamo che $X = \Gamma^{1/2}Z + b$, dove $Z \sim N(0, I)$. Dunque

$$E(e^{\langle\theta,X\rangle}) = E(e^{\langle\theta,\Gamma^{1/2}Z+b\rangle}) = e^{\langle\theta,b\rangle}E(e^{\langle\Gamma^{1/2}\theta,Z\rangle}) = e^{\langle\theta,b\rangle}e^{\frac{1}{2}|\Gamma^{1/2}\theta|^2}.$$

Ma $|\Gamma^{1/2}\theta|^2 = \langle\Gamma^{1/2}\theta, \Gamma^{1/2}\theta\rangle = \langle\Gamma^{1/2}\Gamma^{1/2}\theta, \theta\rangle = \langle\Gamma\theta, \theta\rangle$.

S0.11 a) Calcoliamo la legge di e^X con il metodo della funzione di ripartizione. Indichiamo con $\Phi_{\mu,\sigma}$ e $f_{\mu,\sigma}$ rispettivamente la funzione di ripartizione e la densità di una legge $N(\mu, \sigma^2)$; per $y > 0$ abbiamo

$$P(e^X \le y) = P(X \le \log y) = \Phi_{\mu,\sigma}(\log y).$$

Derivando otteniamo la densità di e^X:

$$g_{\mu,\sigma}(y) = \frac{d}{dy}\,\Phi_{\mu,\sigma}(\log y) = \frac{1}{y}\,f_{\mu,\sigma}(\log y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma y}\exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2}(\log y - \mu)^2\Big).$$

b) Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora si può scrivere $X = \mu+\sigma Z$, dove $Z \sim N(0, 1)$. Dunque, usando l'Esercizio 0.10, per ogni $p \ge 0$,

$$E[(e^X)^p] = E(e^{p\sigma Z+p\mu}) = e^{p\mu}e^{\frac{1}{2}p^2\sigma^2}.$$

Per $p = 1$ si ottiene la media, che vale dunque $e^{\mu}e^{\frac{1}{2}\sigma^2}$; per la varianza si ha

$$\mathrm{Var}(e^X) = E(e^{2X}) - E(e^X)^2 = e^{2\mu}e^{2\sigma^2} - \big(e^{\mu}e^{\sigma^2/2}\big)^2 = e^{2\mu}e^{\sigma^2}\big(e^{\sigma^2} - 1\big).$$

Da notare che i calcoli sarebbero stati più complicati se avessimo provato a calcolare i momenti integrando la densità della legge lognormale, il che avrebbe portato all'integrale

$$\int_0^{+\infty} y^p g_{\mu,\sigma}(y)\,dy.$$

S0.12 Se $X \sim N(0, 1)$,

$$E[e^{tX^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx^2}e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2(\frac{1}{2}-t)}\,dx.$$

L'integrale chiaramente diverge se $t \ge \frac{1}{2}$. Se invece $t < \frac{1}{2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2(\frac{1}{2}-t)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{x^2}{2(1-2t)^{-1}}\Big)\,dx.$$

Riconosciamo nell'integrando, a meno della costante, la densità di una legge normale di media 0 e varianza $(1-2t)^{-1}$. Dunque esso vale $\sqrt{2\pi}(1-2t)^{-1/2}$. Quindi $E[e^{tX^2}] = +\infty$ se $t \ge \frac{1}{2}$ e $E[e^{tX^2}] = (1-2t)^{-1/2}$ se $t < \frac{1}{2}$. Ricordando che se $X \sim N(0, 1)$ allora $Z = \sigma X \sim N(0, \sigma^2)$, si ha $E[e^{tZ^2}] = E[e^{t\sigma^2 X^2}]$. In conclusione

$$E[e^{tZ^2}] = \begin{cases} +\infty & \text{se } t \ge \frac{1}{2\sigma^2} \\ \frac{1}{\sqrt{1-2\sigma^2 t}} & \text{se } t < \frac{1}{2\sigma^2}. \end{cases}$$

S0.13 a) È immediato calcolare le funzioni caratteristiche delle v.a. X_n e il loro limite per $n \to \infty$:

$$\phi_{X_n}(\theta) = e^{i\langle b_n,\theta\rangle}e^{-\frac{1}{2}\langle\Gamma_n\theta,\theta\rangle} \underset{n\to\infty}{\to} e^{i\langle b,\theta\rangle}e^{-\frac{1}{2}\langle\Gamma\theta,\theta\rangle}$$

e riconosciamo a destra la funzione caratteristica di una v.a. $N(b, \Gamma)$

b) La v.a. X_1 ha legge normale (è una funzione lineare-affine della v.a. normale Z_1) di media αx e varianza σ^2.

Anche $X_2 = \alpha X_1 + Z_2$ è normale, come somma delle due v.a. αX_1 e Z_2, che sono normali e indipendenti. Poiché media e varianza sono date da

$$E(X_2) = E(\alpha X_1) + \underbrace{E(Z_2)}_{=0} = \alpha^2 x$$
$$\mathrm{Var}(X_2) = \mathrm{Var}(\alpha X_1) + \mathrm{Var}(Z_2) = \alpha^2\sigma^2 + \sigma^2$$

se ne deduce che $X_2 \sim N(\alpha^2 x, (1+\alpha^2)\sigma^2)$. Per ricorrenza si vede facilmente che $X_n \sim N(\alpha^n x, \sigma^2(1+\alpha^2+\ldots+\alpha^{2(n-1)}))$: supponiamo che ciò sia vero per un valore n e dimostriamolo per $n+1$. Poiché $X_{n+1} = \alpha X_n + Z_{n+1}$ e le due v.a. X_n e Z_{n+1} sono indipendenti ed entrambe di legge normale, anche X_{n+1} ha legge normale. Restano da controllare i valori della media e della varianza di X_{n+1}:

$$E(X_{n+1}) = E(\alpha X_n) + E(Z_{n+1}) = \alpha\cdot\alpha^n x = \alpha^{n+1}x$$
$$\mathrm{Var}(X_{n+1}) = \mathrm{Var}(\alpha X_n) + \mathrm{Var}(Z_{n+1}) = \alpha^2\cdot\sigma^2(1+\alpha^2+\ldots+\alpha^{2(n-1)}) + \sigma^2 =$$
$$= \sigma^2(1+\alpha^2+\ldots+\alpha^{2n}).$$

Poiché $|\alpha| < 1$ abbiamo $\alpha^n x \to 0$ per $n \to \infty$ e

$$\sigma^2(1+\alpha^2+\ldots+\alpha^{2(n-1)}) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}.$$

Per il punto a) $(X_n)_n$ converge in legge a una v.a. $N(0, \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2})$.

Il vettore (X_n, X_{n+1}) è gaussiano perché può essere ottenuto facilmente come trasformazione lineare del vettore (X_n, Z_{n+1}), che è gaussiano dato che X_n e Z_{n+1} sono indipendenti e gaussiane. Per calcolarne il limite in legge basta calcolare il limite delle matrici di covarianza Γ_n (sappiamo già che le medie convergono a 0). Ora

$$\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1}) = \mathrm{Cov}(X_n, \alpha X_n + Z_{n+1}) = \alpha\,\mathrm{Cov}(X_n, X_n) + \mathrm{Cov}(X_n, Z_{n+1}) =$$
$$= \sigma^2\alpha(1+\alpha^2+\ldots+\alpha^{2n}).$$

Poiché già conosciamo il limite delle varianze (e quindi degli elementi sulla diagonale di Γ_n), è immediato ottenere

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ \alpha & 1\end{pmatrix}.$$

La legge limite è dunque gaussiana centrata e avente questa matrice di covarianza.

S0.14 Il risultato è ovvio per $p \le 2$ (anche senza supporre le v.a. gaussiane). Supponiamo quindi $p \ge 2$ e cominciamo con il caso $m = 1$. Se X è centrata e $\mathrm{E}(X^2) = \sigma^2$, si può scrivere $X = \sigma Z$ con $Z \sim N(0, 1)$. Dunque

$$\mathrm{E}(|X|^p) = \sigma^p \underbrace{\mathrm{E}(|Z|^p)}_{=c_p} = c_p \mathrm{E}(|X|^2)^{p/2}$$

Per $m \ge 2$ invece, usando il risultato ottenuto per $m = 1$ e dato che $\frac{p}{2} \ge 1$,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(|X|^p) &\le m^{\frac{p}{2}-1} \sum_{i=1}^m \mathrm{E}(|X_i|^p) \le c_p m^{\frac{p}{2}-1} \sum_{i=1}^m \mathrm{E}(|X_i|^2)^{p/2} \le \\ &\le c_p m^{\frac{p}{2}-1} \Big(\sum_{i=1}^m \mathrm{E}(|X_i|^2)\Big)^{p/2} = c_p m^{\frac{p}{2}-1} \mathrm{E}(|X|^2)^{p/2}.\end{aligned}$$

b) Intanto la convergenza in L^2 implica quella in L^1 e quindi quella della medie: posto $m_n = \mathrm{E}(X_n)$, si ha $\lim_{n\to\infty} m_n = 0$. Poniamo $\tilde X_n = X_n - m_n$. Allora $\tilde X_n$ è centrata e, per a),

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(|X_n|^p) &= \mathrm{E}(|\tilde X_n + m_n|^p) \le 2^{p-1}\big(|m_n|^p + \mathrm{E}(|\tilde X_n|^p)\big) = \\ &= 2^{p-1}\big(|m_n|^p + c_{p,m}\mathrm{E}(|\tilde X_n|^2)^{p/2}\big) \underset{n\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

S0.15 a) Si ha

$$\begin{aligned}F_Y(t) &= \mathrm{P}(Y \le t) = \mathrm{P}(XZ \le t) = \mathrm{P}(XZ \le t, Z = 1) + \mathrm{P}(XZ \le t, Z = -1) = \\ &= \mathrm{P}(X \le t, Z = 1) + \mathrm{P}(-X \le t, Z = -1) = \tfrac12 \mathrm{P}(X \le t) + \tfrac12 \mathrm{P}(X \ge -t).\end{aligned}$$

Ma, con un cambio di variabile evidente,

$$\mathrm{P}(X \ge -t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = \mathrm{P}(X \le t)$$

(vedi anche la Figura 12.1 , per una spiegazione intuitiva).

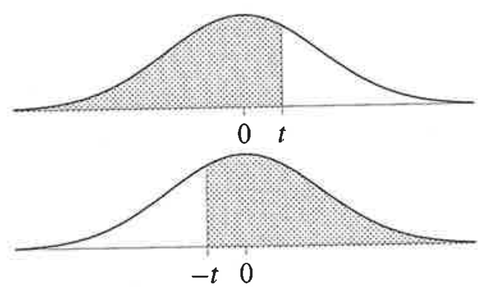

Figura 12.1 Le due superficie tratteggiate hanno la stessa area.

Dunque, riprendendo il calcolo di F_Y, $\mathrm{P}(Y \le t) = \mathrm{P}(X \le t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e X e Y hanno la stessa legge. Si sarebbe anche potuto calcolare la funzione caratteristica di Y: sempre usando l'indipendenza di X e Z,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathrm{e}^{i\theta Y}) &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{i\theta XZ}) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{i\theta XZ} 1_{\{Z=1\}}) + \mathrm{E}(\mathrm{e}^{i\theta XZ} 1_{\{Z=-1\}}) = \\ &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{i\theta X} 1_{\{Z=1\}}) + \mathrm{E}(\mathrm{e}^{-i\theta X} 1_{\{Z=-1\}}) = \tfrac12 \mathrm{E}(\mathrm{e}^{i\theta X}) + \tfrac12 \mathrm{E}(\mathrm{e}^{-i\theta X}) = \\ &= \tfrac12 \mathrm{e}^{-\theta^2/2} + \tfrac12 \mathrm{e}^{-\theta^2/2} = \mathrm{e}^{-\theta^2/2}.\end{aligned}$$

b) Calcoliamo la funzione caratteristica di $X + Y$: $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{i\theta(X+Y)}) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{i\theta X(1+Z)})$. Ripetendo il ragionamento di poco fa per la funzione caratteristica di Y,

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{i\theta(X+Y)}) = \tfrac12 + \tfrac12 \mathrm{E}(\mathrm{e}^{i2\theta X}) = \tfrac12 + \tfrac12 \mathrm{e}^{-2\theta^2}.$$

È facile vedere che questa non può essere la funzione caratteristica di una v.a. normale: ad esempio osservando che si tratta di una v.a. di media 0 e varianza 2 (si deriva la funzione caratteristica in 0) e se fosse normale la sua funzione caratteristica dovrebbe essere $\theta \to \mathrm{e}^{\theta^2}$. La coppia (X, Y) non può quindi avere legge congiunta normale: se l'avesse, anche $X + Y$ sarebbe normale, essendo una funzione lineare di (X, Y).

S0.16 a) Per ipotesi $\phi_n(\theta) \to \phi(\theta)$ per $n \to \infty$, dove ϕ è la funzione caratteristica del limite X. La funzione caratteristica di $-X'_n$ è naturalmente $\phi'_n(\theta) = \overline{\phi_n(\theta)}$. Dunque quella di Y_n è $\phi_{Y_n}(\theta) = |\phi_n(\theta)|^2$. Ne segue che $\phi_{Y_n}(\theta) \to |\phi(\theta)|^2$ per $n \to \infty$. $\psi(\theta) = |\phi(\theta)|^2$ è la funzione caratteristica di una v.a. della forma $X - X'$, dove X' ha la stessa legge di X ed è indipendente da X. Y_n è gaussiana come somma di due v.a. gaussiane indipendenti; essa ha media 0 e varianza $\mathrm{Var}(Y_n) = \mathrm{Var}(X_n) + \mathrm{Var}(-X'_n) = 2\sigma_n^2$. Dunque $Y_n \sim N(0, 2\sigma_n^2)$ e $\phi_{Y_n}(\theta) = \mathrm{e}^{-\sigma_n \theta^2}$.

b) Posto $\mathrm{Var}(W_n) = \sigma_n^2$, allora sappiamo che si può scrivere $W_n = \sigma Z_n$, dove $Z_n \sim N(0, 1)$. Dunque avremmo, ponendo $I = [-a, a]$,

$$\mathrm{P}(W_n \in I) = \mathrm{P}\big(Z_n \in \big[-\tfrac{a}{\sigma_n}, \tfrac{a}{\sigma_n}\big]\big) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Supponiamo che la successione $(W_n)_n$ converga in legge e, per assurdo, che le varianze σ_n^2, non siano limitate. Esisterebbe allora una sottosuccessione $(\sigma_{n_k}^2)_k$ tale che $\lim_{k\to\infty} \sigma_{n_k}^2 = +\infty$. Se f è una funzione continua a supporto contenuto in $[-a, a]$, allora, poiché $-c 1_{[-a,a]} \le f \le c 1_{[-a,a]}$ per qualche $c > 0$, avremmo $\mathrm{E}(f(W_{n_k})) \to_{k\to\infty} 0$. Se indichiamo con ν la legge della v.a. limite W_∞, d'altra parte,

$$\mathrm{E}(f(W_{n_k})) \underset{k\to\infty}{\to} \int f\,d\nu.$$

Dunque sarebbe uguale a 0 l'integrale rispetto a ν di tutte le funzioni continue a supporto compatto. Da ciò si deduce $\nu(I) = 0$ per ogni intervallo limitato I, il che è assurdo.

c) Poiché la varianza delle v.a. Y_n definite in a) è uguale a $2\sigma_n^2$, segue da b) che la successione $(\sigma_n^2)_n$ è limitata. Indichiamo con M un suo maggiorante. Se la successione $(\mu_n)_n$ delle medie non fosse anch'essa limitata, esisterebbe una sotto-successione $(\mu_{n_k})_k$ tale che $\mu_{n_k} \to_{k\to\infty} +\infty$ (per $-\infty$, il ragionamento è simile). Per la disuguaglianza di Chebyshev, per ogni $\eta > 0$ si avrebbe

$$\mathrm{P}(X_{n_k} \le \mu_{n_k} - \eta) \le \frac{\sigma_{n_k}^2}{\eta^2} \le \frac{M}{\eta^2}$$

e, scegliendo $\eta = \sqrt{\mu_{n_k}}$,

$$\mathrm{P}(X_{n_k} \le \mu_{n_k} - \sqrt{\mu_{n_k}}) \le \frac{M}{\mu_{n_k}} \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Poiché la successione di termine generale $\mu_{n_k} - \sqrt{\mu_{n_k}}$ tende a $+\infty$, si avrebbe, per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{P}(X_{n_k} \le a) \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Questo fatto, ripetendo il ragionamento di b), è in contraddizione con l'ipotesi che la successione $(X_{n_k})_k$ converga in legge (implicherebbe che la legge limite ν dà massa nulla ad ogni intervallo limitato).

Dunque sia la successione delle medie che quella delle varianze sono limitate. Esiste dunque una sotto-successione $(n_k)_k$ tale che

$$\mu_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} \mu, \qquad \sigma_{n_k}^2 \underset{k\to\infty}{\to} \sigma^2$$

per qualche valore μ e σ^2. Si può quindi calcolare facilmente la funzione caratteristica della legge limite:

$$\phi(\theta) = \lim_{k\to\infty} \phi_{n_k}(\theta) = \lim_{k\to\infty} e^{i\theta\mu_{n_k}} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{n_k}^2\theta^2} = e^{i\theta\mu} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}$$

e quindi la v.a. limite X ha legge gaussiana.

S0.17 La funzione

$$x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

è la densità di una legge, μ_{σ^2}, normale $N(0, \sigma^2)$. Ora $\hat{\mu}_{\sigma^2}(\theta) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}$ e dunque

$$\lim_{\sigma\to 0+} \hat{\mu}_{\sigma^2}(\theta) = 1$$

per ogni $\theta \in \mathbb{R}$. Poiché la funzione che vale identicamente 1 è la funzione caratteristica di δ_0 (massa concentrata in 0), per $\sigma \to 0+$ μ_{σ^2} converge a δ_0 strettamente, che è, appunto, la tesi.

S0.18 a) Per il Lemma di Borel-Cantelli la (0.19) è vera se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(X_n \ge (\alpha \log n)^{1/2}) < +\infty.$$

Grazie alla disuguaglianza del suggerimento (quella di destra)

$$\mathrm{P}(X_n \ge (\alpha \log n)^{1/2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha\log n)^{1/2}} e^{-y^2/2}\,dy \le$$
$$\le \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha\log n}} e^{-\frac{1}{2}\alpha\log n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha\log n}\, n^{\alpha/2}}.$$

Poiché $\frac{\alpha}{2} > 1$, l'ultimo membro è il termine generale di una serie convergente.

b) Sempre per il Lemma di Borel-Cantelli, basta mostrare che $\mathrm{P}(X_n \ge (2\log n)^{1/2})$ è il termine generale di una serie divergente. Per la disuguaglianza del suggerimento

$$\mathrm{P}(X_n \ge (2\log n)^{1/2}) \ge \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left((2\log n)^{1/2} + (2\log n)^{-1/2}\right)^{-1} e^{-\log n} \sim \frac{1}{n\sqrt{2\pi}\,\log n}$$

che è il termine generale di una serie divergente.

c) Le v.a. $(\log n)^{-1/2} X_n$ hanno media nulla e varianza, $(\log n)^{-1}$, che tende a 0 per $n \to \infty$. Per la disuguaglianza di Chebyshev, per ogni $\alpha > 0$,

$$\mathrm{P}\Big(\Big|\frac{X_n}{\sqrt{\log n}}\Big| \le \alpha\Big) \le \frac{1}{\alpha^2 \log n} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Dunque $(\log n)^{-1/2} X_n \to_{n\to\infty} 0$ in probabilità. D'altra parte, per il punto b), si ha, con probabilità 1,

$$\frac{X_n}{\sqrt{\log n}} \ge \sqrt{2} \qquad \text{per infiniti indici } n$$

e non è dunque possibile che la successione converga a 0 q.c.

S0.19 Cominciamo col verificare la formula per $f = 1_A$, con $A \in \mathscr{E}$. Intanto il termine di sinistra vale evidentemente $\mathrm{Q}(A)$. D'altra parte si ha $1_A \circ X = 1_{\{X\in A\}}$: infatti $X(\omega) \in A$ se e solo se $\omega \in \{X \in A\}$; dunque il termine a destra vale $\mathrm{P}(X \in A)$ ed è uguale a $\mathrm{Q}(A)$ per definizione. Consideriamo ora l'insieme $\mathscr{H}$ delle funzioni misurabili limitate $f : E \to \mathbb{R}$ per le quali la relazione della Proposizione 0.1 è vera. Si tratta di uno spazio vettoriale di funzioni limitate e abbiamo appena visto che contiene tutte le indicatrici degli eventi di $\mathscr{E}$. Inoltre se $(f_n)_n \subset \mathscr{H}$ è una successione di funzioni crescente a f, allora, applicando due volte il Teorema di Beppo Levi,

$$\int_E f\,d\mathrm{Q} = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mathrm{Q} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \circ X\,d\mathrm{P} = \int_\Omega f \circ X\,d\mathrm{P}. \tag{12.3}$$

Dunque, per il Teorema 0.11, $\mathcal{H}$ contiene tutte le funzioni misurabili limitate e la relazione della Proposizione 0.1 è verificata se f è limitata. Per terminare occorre provare che f è Q-integrabile se e solo se $f \circ X$ è P-integrabile. Si può supporre $f \geq 0$ (a meno di decomporre f nelle sue parti positiva e negativa). Ma se poniamo $f_n = f \wedge n$, allora $(f_n)_n$ converge crescendo a f e si osserva, sempre con una doppia applicazione del Teorema di Beppo Levi, che vale la (12.3), per cui l'integrale di f rispetto a Q è finito se e solo se lo è quello di $f \circ X$ rispetto a P.

S0.20 Come indicato nel suggerimento, la famiglia delle parti $A \in \mathcal{E}$ tali che $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ è una σ-algebra. Infatti valgono le relazioni

$$X^{-1}(A)^c = X^{-1}(A^c)$$
$$X^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n).$$

Questa σ-algebra contiene la classe $\mathcal{D}$ e quindi necessariamente anche $\mathcal{E}$. Dunque $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ per ogni $A \in \mathcal{E}$ e X è misurabile.

S1.1 a) X e Y sono equivalenti perché due v.a. che sono q.c. uguali hanno la stessa legge: se $t_1, \dots, t_n \in T$, allora

$$\{(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \neq (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{X_{t_i} \neq Y_{t_i}\}$$

e si tratta quindi di un evento di probabilità nulla, come riunione finita di eventi di probabilità nulla. Dunque, per ogni $A \in \mathcal{E}^{\otimes n}$, i due eventi $\{(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A\}$ e $\{(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \in A\}$ differiscono al più per un evento di probabilità nulla ed hanno la stessa probabilità.

b) Dato che le traiettorie dei due processi sono continue, se coincidono agli istanti di un sottoinsieme denso, esse coincidono necessariamente su tutto T. Sia $\{t_1, t_2, \dots\}$ una successione di tempi densa in T ($T \cap \mathbb{Q}$, per esempio). Dunque

$$\bigcap_{t \in T} \{X_t = Y_t\} = \bigcap_{i} \{X_{t_i} = Y_{t_i}\}.$$

Poiché $P(X_{t_i} = Y_{t_i}) = 1$ per ogni i, ne segue che $P(X_t = Y_t \text{ per ogni } t) = 1$ e dunque i due processi sono indistinguibili.

• Per il punto b), sarebbe stato sufficiente supporre i due processi continui a destra, o a sinistra.

S1.2 a) Per l'Esercizio 0.20, basta dimostrare che, per ogni $s \geq 0$, $\{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_\tau$. È ovvio che $\{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_\infty$. Occorre poi verificare che, per ogni t, $\{\tau \leq s\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Ma, se $t \leq s$, si ha $\{\tau \leq s\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Se invece $t > s$, $\{\tau \leq s\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

b) Si ha

$$\{\sigma \wedge \tau \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cup \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

e dunque $\sigma \wedge \tau$ è un tempo d'arresto. In maniera simile si opera per $\sigma \vee \tau$:

$$\{\sigma \vee \tau \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

c) Se $A \in \mathcal{F}_\sigma$, allora per ogni t $A \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Poiché $\{\tau \leq t\} \subset \{\sigma \leq t\}$,

$$A \cap \{\tau \leq t\} = \underbrace{A \cap \{\sigma \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \cap \underbrace{\{\tau \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t.$$

d) Grazie a c), $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$ è contenuta sia in $\mathcal{F}_\sigma$ che in $\mathcal{F}_\tau$. Mostriamo l'inclusione opposta. Sia $A \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$; allora $A \in \mathcal{F}_\infty$, $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ e $A \cap \{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_t$. Si ha dunque

$$A \cap \{\sigma \wedge \tau \leq t\} = A \cap (\{\sigma \leq t\} \cup \{\tau \leq t\}) = (A \cap \{\sigma \leq t\}) \cup (A \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$$

e dunque $A \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$.

S1.3 a) Poiché $(Y_t)_t$ è continuo, per la Proposizione 1.4 basta mostrare che è adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$. Fissiamo $t > 0$. L'applicazione $(\omega, s) \to X_s(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $s \leq t$, è $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t])$-misurabile, dunque per il Teorema di Fubini l'applicazione $\omega \to \int_0^t X_s(\omega)\, ds$ è $\mathcal{F}_t$-misurabile e Y è adattato.

b) Se A^c è trascurabile, poniamo $X'_s(\omega) = X_s(\omega)$ su A, $X'_s(\omega) = 0$ su A^c. Poiché supponiamo che lo spazio sia standard, $A^c \in \mathcal{F}_t$ per ogni t e X' è ancora progressivamente misurabile; inoltre $A' = \big\{\omega;\ \int_0^T |X'_s(\omega)|\, ds < +\infty\big\} = \Omega$. Basta ora applicare il punto a).

S1.4 a) Si ha

$$\psi_X^{-1}(A_{t,\varepsilon}) = \{\omega; |\gamma_t - X_t| \leq \varepsilon\}.$$

Dunque $\psi_X^{-1}(A_{t,\varepsilon}) \in \mathcal{F}$, poiché questo insieme è l'immagine inversa tramite X_t della palla chiusa di $\mathbb{R}^m$ di centro γ_t e raggio ε. Anzi $\psi_X^{-1}(A_{t,\varepsilon}) \in \mathcal{F}_t$.

b) Poiché le traiettorie sono continue,

$$\psi_X^{-1}(\bar{U}_\varepsilon) = \{w; |\gamma_t - X_t| \leq \varepsilon \text{ per ogni } t \in [0, T]\} = \bigcap_{r \in [0,T] \cap \mathbb{Q}} \{w; |\gamma_r - X_r| \leq \varepsilon\}.$$

Dunque, grazie ad a), $\psi_X^{-1}(\bar{U}_\varepsilon)$ appartiene a $\mathcal{F}$ come intersezione numerabile di eventi di a $\mathcal{F}$. Anche $U_\varepsilon \in \mathcal{F}$, poiché $U_\varepsilon = \bigcap_n \bar{U}_{\varepsilon_n + 1/n}$. Poiché $\mathcal{C}$ è separabile, ogni aperto di $\mathcal{C}$ è riunione al più numerabile d'insiemi della forma U_ε. Questi ultimi, al variare di $\gamma \in \mathcal{C}$, $T > 0$, $\varepsilon > 0$, costituiscono quindi una classe, $\mathcal{D}$, che genera la σ-algebra dei boreliani. Basta ora applicare il criterio dell'Esercizio 0.20.

S2.1 a) Se $A_2 \in \mathcal{C}_2$ è fissato, le due misure su $\mathcal{F}_1$

$$A_1 \to P(A_1 \cap A_2) \qquad \text{e} \qquad A_1 \to P(A_1)P(A_2)$$

sono finite e coincidono su $\mathscr{C}_1$; esse hanno anche la stessa massa totale ($= \mathrm{P}(A_2)$). Per il Teorema 0.4, esse coincidono su $\mathscr{F}_1$ e (2.8) è verificata per $A_1 \in \mathscr{F}_1$ e $A_2 \in \mathscr{C}_2$. Ripetendo questo ragionamento fissando ora $A_1 \in \mathscr{F}_1$ si ottiene che la (2.8) vale per ogni $A_1 \in \mathscr{F}_1$ e $A_2 \in \mathscr{F}_2$, cioè la tesi.

b) Indichiamo con $(E_i, \mathscr{E}_i)$ e $(G_i, \mathscr{G}_i)$ gli spazi misurabili in cui le v.a. X_i, Y_i prendono i loro valori rispettivamente. Consideriamo la classe $\mathscr{C}_1$ degli eventi della forma

$$\{X_1 \in A_1', \dots, X_n \in A_n'\}$$

al variare di $n \geq 1, X_1, \dots, X_n \in \mathscr{I}, A_1' \in \mathscr{E}_1, \dots, A_n' \in \mathscr{E}_n$. Definiamo in modo simile $\mathscr{C}_2$ come la classe degli eventi

$$\{Y_1 \in B_1', \dots, Y_k \in B_k'\}$$

al variare di $k \geq 1, Y_1, \dots, Y_k \in \mathscr{J}, B_1' \in \mathscr{G}_1, \dots, B_k' \in \mathscr{G}_k$. Si verifica subito che $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ sono stabili per l'intersezione finita e generano $\sigma(X, X \in \mathscr{I})$ e $\sigma(Y, Y \in \mathscr{J})$ rispettivamente. Inoltre la (2.8) è soddisfatta per ogni $A_1 \in \mathscr{C}_1, A_2 \in \mathscr{C}_2$. Infatti, se

$$A_1 = \{X_1 \in A_1', \dots, X_n \in A_n'\}, \qquad A_2 = \{Y_1 \in B_1', \dots, Y_k \in B_k'\},$$

poiché le v.a. $(X_1, \dots, X_n)$ e $(Y_1, \dots, Y_k)$ sono supposte indipendenti,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathrm{P}(X_1 \in A_1', \dots, X_n \in A_n', Y_1 \in B_1', \dots, Y_k \in B_k') = \\ &= \mathrm{P}\big((X_1, \dots, X_n) \in A_1' \times \dots \times A_n', (Y_1, \dots, Y_k) \in B_1' \times \dots \times B_k'\big) = \\ &= \mathrm{P}\big((X_1, \dots, X_n) \in A_1' \times \dots \times A_n'\big)\mathrm{P}\big((Y_1, \dots, Y_k) \in B_1' \times \dots \times B_k'\big) = \\ &= \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2).\end{aligned}$$

Le due σ-algebre $\sigma(X, X \in \mathscr{I})$ e $\sigma(Y, Y \in \mathscr{J})$ sono quindi indipendenti per il punto a).

c) Per ogni scelta di $X_1, \dots, X_n \in \mathscr{I}$ e $Y_1, \dots, Y_k \in \mathscr{J}$, la (2.9) implica $\mathrm{Cov}(X_i, Y_j) = 0, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$; le due v.a. $(X_1, \dots, X_n)$ e $(Y_1, \dots, Y_k)$ risultano dunque indipendenti per il criterio d'indipendenza visto subito prima della Proposizione 0.10. Si può quindi applicare il punto b).

d) La condizione è chiaramente necessaria. Viceversa le condizioni a) e c) della Definizione 2.18 sono immediate. Mostriamo che, per ogni $s \leq t$, la v.a. $B_t - B_s$ è indipendente dalla σ-algebra $\sigma(B_u, u \leq s)$: le v.a. $B_t - B_s, B_u, u \leq s$ formano una famiglia gaussiana per ipotesi e la (2.10) implica $\mathrm{Cov}(B_i(t) - B_i(s), B_j(u)) = 0$ per ogni $u \leq s, 1 \leq i, j \leq 1$ e si può applicare il criterio del punto c).

S2.2 Si tratta di dimostrare che se $Z_1, \dots, Z_m \in \mathscr{I}$ allora la v.a. $W = \alpha_1 Z_1 + \dots + \alpha_m Z_m + \alpha_{m+1} X$ ha legge gaussiana per ogni scelta di $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}$. Ma questo segue immediatamente dalla Proposizione 0.10, dato che W è limite in L^2 delle v.a. $W_n = \alpha_1 Z_1 + \dots + \alpha_m Z_m + \alpha_{m+1} X_n$, che sono gaussiane per ipotesi. Basta ora osservare che la

successione $(X_n - X)_n$ è formata da v.a. gaussiane e converge a 0 in L^2. La convergenza ha dunque luogo anche il L^p per ogni p per l'Esercizio 0.14 b).

S2.3 a) La v.a. $2m$-dimensionale (X_s, X_t) è gaussiana (Proposizione 2.2) ed ha media (b_s, b_t). Osservando che $K_{t,t}$ è la matrice di covarianza di X_t, la matrice di covarianza di (X_s, X_t) è la matrice a blocchi

$$\begin{pmatrix} K_{t,t} & K_{s,t} \\ K_{t,s} & K_{s,s} \end{pmatrix}.$$

La legge di (X_s, X_t) è quindi determinata dalle funzioni K e b. Allo stesso modo si vede che, se $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, allora la v.a. $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ è gaussiana, ha una matrice di covarianza con i blocchi K_{t_i,t_i} sulla diagonale e i blocchi K_{t_i,t_j} fuori della diagonale ed ha media $(b_{t_1}, \dots, b_{t_n})$. Dunque le distribuzioni di dimensione finita sono determinate da K e b.

b) Si tratta di dimostrare che, per ogni scelta di $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, la v.a. $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ è gaussiana. Ma questa v.a. si ottiene da $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ mediante la trasformazione lineare-affine $x \to \tilde{A}x + \tilde{z}$, dove

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{t_1} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & A_{t_n} \end{pmatrix}$$

e $\tilde{z} = (z_{t_1}, \dots, z_{t_1})$. Si tratta quindi ancora di una v.a. gaussiana perché, come abbiamo visto nel paragrafo 0.7, le applicazioni lineari-affini trasformano v.a. gaussiane in v.a. gaussiane. La funzione di media di Y è naturalmente $\mathrm{E}(Y_t) = \mathrm{E}(A_t X_t) + z_t = A_t b_t + z_t$. Per quella di covarianza conviene osservare che, se consideriamo X_t come un vettore colonna, allora $K_{s,t} = \mathrm{E}((X_s - b_s)(X_t - b_t)^*)$ (vedi la (0.9)). Dunque, indicando con G la funzione di covarianza di Y,

$$G_{s,t} = \mathrm{E}((A_s(X_s - b_s))(A_t(X_t - b_t))^*) = A_s K_{s,t} A_t^*.$$

S2.4 Se $\gamma \in G$, poiché le traiettorie di X sono continue, l' integrale nella (2.11) è limite, per ogni ω, delle somme di Riemann, cioè

$$X_\gamma = \int X_s \, d\gamma(s) = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\sum_{i \geq 0} X_{i/n} \gamma([\tfrac{i}{n}, \tfrac{(i+1)}{n}[)}_{=I_n(\gamma)}$$

Ora se $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in G$, allora il vettore $I_n = (I_n(\gamma_1), \dots, I_n(\gamma_m))$ è gaussiano come funzione lineare delle v.a. $X_{i/n}, i = 0, 1, \dots$ che sono congiuntamente gaussiane. D'altra parte $\lim_{n\to\infty} I_n = (X_{\gamma_1}, \dots, X_{\gamma_m})$; poiché la convergenza q.c. implica quella in legge, per l'Esercizio 0.16 la v.a. $(X_{\gamma_1}, \dots, X_{\gamma_m})$ è gaussiana e dunque $(X_\gamma)_{\gamma\in G}$ è una famiglia gaussiana.

b) Per mostrare che Y è un processo gaussiano basta osservare che si può scrivere

$$Y_t = \int_0^t X_s\,\mu(ds) = \int X_s\,\gamma(ds)$$

dove $d\gamma = 1_{[0,t]}\,d\mu$. Si può quindi applicare il punto a).

c) Y_t è centrata per ogni t poiché, per il Teorema di Fubini,

$$\mathrm{E}(Y_t) = \mathrm{E}\Big(\int_0^t X_u\,d\mu(u)\Big) = \int_0^t \mathrm{E}(X_u)\,d\mu(u) = 0.$$

Se poniamo $K_{s,t} = \mathrm{E}(Y_tY_s)$, allora

$$K_{s,t} = \mathrm{E}\Big(\int_0^t X_u\,d\mu(u)\cdot\int_0^s X_v\,d\mu(v)\Big) = \int_0^t d\mu(u)\int_0^s \mathrm{E}(X_uX_v)\,d\mu(v) = \tag{12.4}$$
$$= \int_0^t d\mu(u)\int_0^s u\wedge v\,d\mu(v).$$

Dunque

$$\sigma_t^2 = K_{t,t} = \int_0^t d\mu(u)\int_0^t u\wedge v\,d\mu(v) =$$
$$= \int_0^t d\mu(u)\int_0^u v\,d\mu(v) + \int_0^t d\mu(u)\int_u^t u\,d\mu(v) = I_1 + I_2.$$

Per il Teorema di Fubini (come per le altre relazioni di questo esercizio)

$$I_2 = \int_0^t d\mu(v)\int_0^v u\,d\mu(u) = I_1.$$

Inoltre

$$\int_0^u v\,d\mu(v) = \int_0^u d\mu(v)\int_0^v dr = \int_0^u dr\int_r^u d\mu(v) = \int_0^u d\mu(]r,u])\,dr$$

e quindi, usando la (2.12)

$$I_1 = \int_0^t d\mu(u)\int_0^u \mu(]r,u])\,dr = \int_0^t dr\int_r^t \mu(]r,u])\,d\mu(u) = \frac{1}{2}\int_0^t \mu(]r,t])^2\,dr$$

che conclude il calcolo della varianza di Y_t. Per cercare una espressione più esplicita per $\mathrm{Cov}(Y_s, Y_t) = K_{s,t}$, si ha, partendo dalla (12.4) e supponendo $s \le t$,

$$K_{s,t} = \int_0^s d\mu(u)\int_0^s u\wedge v\,d\mu(v) + \int_s^t d\mu(u)\int_0^s u\wedge v\,d\mu(v) =$$
$$= \int_0^s \mu(]r,s])^2\,dr + \int_s^t d\mu(u)\int_0^s v\,d\mu(v) =$$
$$= \int_0^s \mu(]r,s])^2\,dr + \mu(]s,t])\int_0^s \mu(]r,s])\,dr = \int_0^s \mu(]r,t])\mu(]r,s])\,dr.$$

Giusto per completezza giustifichiamo la (2.12). In effetti $\mu(]r,t])^2$ non è altro che la misura, rispetto a $\mu\otimes\mu$ del quadrato $]r,t]\times]r,t]$, mentre l'integrale nel termine di destra è la misura del triangolo ombreggiato nella Figura 12.2. La dimostrazione rigorosa si fa facilmente col Teorema di Fubini.

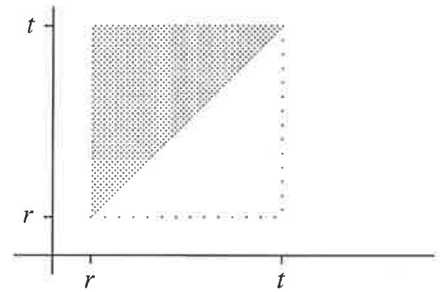

Figura 12.2

S2.5 Per la legge del logaritmo iterato esistono due successioni $(t_n)_n$, $(s_n)_n$ decrescenti a 0 e tali che q.c. per ogni n,

$$B_{t_n} \ge \sqrt{(2-\varepsilon)t_n \log\log \tfrac{1}{t_n}}$$
$$B_{s_n} \le -\sqrt{(2-\varepsilon)s_n \log\log \tfrac{1}{s_n}}\,.$$

In particolare $B_{s_n} < 0 < B_{t_n}$. Poiché si può scegliere $t_n \le s_n \le t_{n+1}$, per il teorema dei valori intermedi $t \to B_t$ si annulla infinite volte in $[0,\varepsilon]$ per ogni $\varepsilon > 0$.

S2.6 a) Se $t \ge s$, poiché $B_t - B_s$ è indipendente da $\mathscr{F}_s$, la v.a.

$$X_t - X_s = \langle z, B_t\rangle - \langle z, B_s\rangle = \langle z, B_t - B_s\rangle$$

è anch'essa indipendente da $\mathscr{F}_s$. Inoltre $X_t - X_s = \langle z, B_t - B_s\rangle$ è gaussiana, come combinazione lineare delle v.a. $B_1(t) - B_1(s), \dots, B_m(t) - B_m(s)$, che sono congiuntamente gaussiane. La varianza di $X_t - X_s$ si calcola immediatamente, dato che si tratta di una funzione lineare di $B_t - B_s$. La (0.10) dà

$$\mathrm{Var}(X_t - X_s) = (t-s)z^*z = (t-s)|z|^2 = t-s.$$

Dato che la a) della Definizione 2.18 è ovvia, ciò prova che X è un moto browniano rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$.

b) Se X è un moto browniano allora la v.a. $X_t - X_s = A(B_t - B_s)$ deve essere $N(0,(t-s)I)$. Essa è gaussiana, come funzione lineare di v.a. congiuntamente gaussiane, e la sua matrice di covarianza è $C = (t-s)AA^*$ (vedi la (0.10)). Occorre quindi che sia $AA^* = I$, ovvero $A^* = A^{-1}$. A deve dunque essere ortogonale. D'altra parte, se questa condizione è soddisfatta, X è un moto browniano rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$, dato che $X_t - X_s = A(B_t - B_s)$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$ e che la a) della Definizione 2.18 è immediata.

S2.7 a) Per il principio di riflessione si ha, per $t > 0$,

$$F_a(t) = \mathrm{P}(\tau_a \le t) = \mathrm{P}\Big(\sup_{s\le t} B_s > a\Big) = 2\mathrm{P}(B_t > a) = 2\mathrm{P}(B_1 > at^{-1/2}) =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{at^{-1/2}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx,$$

che dà la funzione di ripartizione di τ_a. Si tratta di una funzione derivabile, per cui τ_a ha densità

$$f_a(t) = F'_a(t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-a^2/2t}\frac{d}{dt}\frac{a}{\sqrt{t}} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}\,t^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-a^2/2t}.$$

Si ha

$$\mathrm{E}(\sqrt{\tau_a}) = \int_0^{+\infty}\sqrt{t}\,f_a(t)\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{a}{\sqrt{2\pi}\,t}\,\mathrm{e}^{-a^2/2t}\,dt = +\infty,$$

poiché l'integrando si comporta come $\frac{1}{t}$ all'infinito. A maggior ragione $\mathrm{E}(\tau_a) = +\infty$.

b) Per il Teorema 2.15, $\tilde{B}_t = B_{\tau_a+t} - B_{\tau_a}$ è un moto browniano indipendente da $\mathcal{F}_{\tau_a}$. Se indichiamo con $\tilde{\tau}_a$ il tempo di passaggio in a del moto browniano $\tilde{B}$, le due v.a. τ_a e $\tilde{\tau}_a$ hanno la stessa legge e sono indipendenti. Inoltre è chiaro che $\tau_{2a} = \tau_a + \tilde{\tau}_a$. Per ricorrenza si ha quindi che la somma di n v.a. indipendenti $X_1, \dots, X_n$ di legge uguale a quella di τ_a ha la stessa legge di τ_{na}. Dunque la densità di $(X_1 + \dots + X_n)n^{-2}$ vale

$$n^2 f_{na}(n^2 t) = n^2\frac{na}{\sqrt{2\pi}\,(n^2t)^{3/2}}\exp\big(-\tfrac{a^2n^2}{2tn^2}\big) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}\,t^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-a^2/2t} = f_a(t).$$

S2.8 a) Si tratta di dimostrare che, per ogni $s \le t$, la v.a. $B_t - B_s$ è indipendente da $\tilde{\mathcal{F}}_s$. Consideriamo la famiglia $\mathcal{C}$ degli eventi della forma $A \cap G$, con $A \in \mathcal{F}_s$, $G \in \mathcal{G}$. Si tratta di una famiglia stabile per l'intersezione finita e che genera $\tilde{\mathcal{F}}_s = \mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}$. Per l'Esercizio 2.1 basta dimostrare che, per ogni boreliano $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e per ogni $A \in \mathcal{F}_s$, $G \in \mathcal{G}$, si ha

$$\mathrm{P}(\{B_t - B_s \in C\} \cap A \cap G) = \mathrm{P}(B_t - B_s \in C)\mathrm{P}(A \cap G).$$

Ma questo è evidente, dato che $\{B_t - B_s \in C\} \cap A \in \mathcal{F}_t$, ed è dunque un evento indipendente da G ($\mathcal{G}$ e $\mathcal{F}_t$ sono indipendenti). Quindi

$$\mathrm{P}(\{B_t - B_s \in C\} \cap A \cap G) = \mathrm{P}(\{B_t - B_s \in C\} \cap A)\mathrm{P}(G) =$$
$$= \mathrm{P}(\{B_t - B_s \in C\})\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(G) = \mathrm{P}(B_t - B_s \in C)\mathrm{P}(A \cap G)$$

dove abbiamo usato il fatto che i due eventi $\{B_t - B_s \in C\}$ e A sono anch'essi indipendenti.

b) Dimostrazione molto simile alla precedente. Indichiamo con $\mathcal{N}$ la famiglia degli eventi trascurabili di $\mathcal{F}$. Allora la classe $\mathcal{C}$ degli eventi della forma $A \cap G$ con $A \in \mathcal{F}_s$ e $G \in \mathcal{N}$ oppure $G = \Omega$ è stabile per l'intersezione finita e genera $\bar{\mathcal{F}}_s$. Ma, per ogni boreliano $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, si ha immediatamente

$$\mathrm{P}(\{B_t - B_s \in C\} \cap A \cap G) = \mathrm{P}(\{B_t - B_s \in C\} \cap A)\mathrm{P}(G).$$

Infatti se $G \in \mathcal{N}$ entrambi i membri sono uguali a 0, mentre se $G = \Omega$ non c'è niente da dimostrare. Per l'Esercizio 2.1 $B_t - B_s$ e $\bar{\mathcal{F}}_s$ sono quindi indipendenti.

S2.9 a) Per la legge del logaritmo iterato, con probabilità 1 esistono dei valori di t arbitrariamente grandi tali che $X_1(t) \ge \sqrt{(2-\varepsilon)t\log\log t}$ (X_1 è la prima componente del moto browniano X). Esiste quindi, con probabilità 1, un tempo t abbastanza grande perché sia $|X_t| > 1$ e dunque $\tau < +\infty$.

Indichiamo con ν la legge di X_τ. Sia O una matrice ortogonale; posto $Y_t = OX_t$, sappiamo (Esercizio 2.6) che Y è ancora un moto browniano. Inoltre, poiché $|Y_t| = |X_t|$ per ogni t, τ è anche il tempo d'uscita di Y da B. Dunque la legge di $Y_\tau = OX_\tau$ coincide con quella di X_τ, cioè con ν. Dunque la legge immagine di ν tramite O (che definisce una trasformazione della superficie della sfera, ∂B, in se stessa) è ancora ν. Ciò permette di concludere perché, come indicato nel suggerimento, l'unica probabilità su ∂B con questa proprietà è la misura di Lebesgue $m-1$- dimensionale normalizzata.

b) Siano Γ e A boreliani rispettivamente di ∂B e di $\mathbb{R}^+$; dobbiamo mostrare che $\mathrm{P}(X_\tau \in \Gamma, \tau \in A) = \mathrm{P}(X_\tau \in \Gamma)\mathrm{P}(\tau \in A)$. Ripetendo gli argomenti sviluppati in a), si ha per ogni matrice ortogonale O

$$\mathrm{P}(X_\tau \in \Gamma, \tau \in A) = \mathrm{P}(X_\tau \in O\Gamma, \tau \in A).$$

Dunque su ∂B la misura ν_A definita da $\nu_A(\Gamma) = \mathrm{P}(X_\tau \in \Gamma, \tau \in A)$ è invariante per rotazioni. Essa è dunque della forma $\nu_A = c \cdot \lambda$ ed evidentemente la costante c è determinata da $c\lambda(\partial B) = \mathrm{P}(\tau \in A)$. Dunque

$$\mathrm{P}(X_\tau \in \Gamma, \tau \in A) = c \cdot \lambda(\Gamma) = \frac{\mathrm{P}(\tau \in A)}{\lambda(\partial B)}\lambda(\Gamma) = \mathrm{P}(X_\tau \in \Gamma)\mathrm{P}(\tau \in A).$$

S2.10 a) L'integrale che appare nella definizione di Z_t è convergente per quasi ogni ω, poiché per la legge del logaritmo iterato, con probabilità 1, $|B_t| \le \big((2+\varepsilon)t\log\log\frac{1}{t}\big)^{1/2}$ per t in un intorno di 0 e la funzione $t \to t^{-1/2}\big(\log\log\frac{1}{t}\big)^{1/2}$ è integrabile in $0+$. Mostriamo che Z è un processo gaussiano, cioè che, per ogni scelta di $t_1,\dots,t_m$, la v.a. $\tilde Z = (Z_{t_1},\dots,Z_{t_m})$ è gaussiana. Non si può applicare immediatamente l'Esercizio 2.4 b) perché la misura $\frac{1}{u}\,du$ non è di Borel (dà massa infinita a ogni intervallo contenente 0). Ma, per l'Esercizio 2.4 a), è gaussiana la v.a. $\tilde Z^{(n)} = (Z^{(n)}_{t_1},\dots,Z^{(n)}_{t_m})$, dove

$$Z^{(n)}_{t_i} = B_{t_i} - \int_{1/n}^{t_i}\frac{B_u}{u}\,du \qquad i=1,\dots,m.$$

Basta poi osservare che $\lim_{n\to\infty}\tilde Z^{(n)} = \tilde Z$ q.c. e che la convergenza q.c. implica quella in legge. Se ne deduce che $\tilde Z$ è gaussiana, per l'Esercizio 0.16. Chiaramente inoltre $Z_0 = 0$ e Z_t è centrata. Calcoliamo la funzione di covarianza. Se $s \le t$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z_sZ_t) &= \mathrm{E}\Big[\Big(B_s - \int_0^s\frac{B_v}{v}\,dv\Big)\Big(B_t - \int_0^t\frac{B_u}{u}\,du\Big)\Big] =\\
&= \mathrm{E}(B_sB_t) - \int_0^s\frac{\mathrm{E}(B_tB_v)}{v}\,dv + \int_0^t\frac{\mathrm{E}(B_sB_u)}{u}\,du + \int_0^s dv\int_0^t\frac{\mathrm{E}(B_vB_u)}{uv}\,du =\\
&= s - \int_0^s dv - \int_0^s du - \int_s^t\frac{s}{u}\,du - \underbrace{\int_0^s dv\int_0^t\frac{v\wedge u}{uv}\,du}_{=I} =\\
&= -s - s(\log t - \log s) - I.
\end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale doppio:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^s dv\int_0^v\frac{1}{v}\,du + \int_0^s dv\int_v^t\frac{1}{u}\,du =\\
&= s + \int_0^s(\log t - \log v)\,dv = s + s\log t - s\log s + s = 2s + s(\log t - \log s).
\end{aligned}$$

e dunque $\mathrm{E}(Z_sZ_t) = s$, che, grazie alla Proposizione 2.4, completa la dimostrazione che $(Z_t)_t$ è un moto browniano naturale.

b) Il processo $(Z_t)_t$ è chiaramente adattato a $(\mathscr{F}_t)_t$ (vedi l'Esercizio 1.3 a)). Per mostrare che non si tratta un moto browniano rispetto a $(\mathscr{F}_t)_t$, ci sono vari modi. Ad esempio, se lo fosse, $Z_t - Z_s$ sarebbe indipendente da B_s, che è una v.a. $\mathscr{F}_s$-misurabile. Invece si ha

$$\mathrm{E}[(Z_t - Z_s)B_s] = \mathrm{E}[(B_t - B_s)B_s] - \int_s^t\frac{\mathrm{E}(B_sB_u)}{u}\,du = -\int_s^t\frac{s}{u}\,du = -s\log\frac{t}{s} \ne 0.$$

c) Per dimostrare che B_t è indipendente da $\mathscr{G}_t$, per l'Esercizio 2.1 c), basta dimostrare che Z_s è indipendente da B_t per ogni $s \le t$. Ma questo è immediato, perché

$$\mathrm{E}(Z_sB_t) = \mathrm{E}(B_sB_t) - \int_0^s\frac{\mathrm{E}(B_uB_t)}{u}\,du = s - \int_0^s du = 0.$$

Ripetendo l'argomentazione usata in a), si vede che Z_s e B_t sono congiuntamente gaussiane e poiché sono non correlate, sono indipendenti.

S2.11 a) Riprendendo l'argomento usato per il punto a) dell'Esercizio 2.10 si vede che $\tilde B$ è un processo gaussiano. Perché sia un moto browniano naturale basta quindi che si abbia $\mathrm{E}(\tilde B_t\tilde B_s) = s$. Si tratta di un calcolo elementare, anche se laborioso. Se $s < t \le 1$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(\tilde B_t\tilde B_s) =\\
&= \mathrm{E}(B_tB_s) - \int_0^t\mathrm{E}\Big[B_s\frac{B_1 - B_u}{1-u}\Big]du - \int_0^s\mathrm{E}\Big[B_t\frac{B_1 - B_v}{1-v}\Big]dv +\\
&\quad + \int_0^s dv\int_0^t\mathrm{E}\Big[\frac{B_1 - B_v}{1-v}\,\frac{B_1 - B_u}{1-u}\Big]du =\\
&s - \int_0^t\frac{s - s\wedge u}{1-u}\,du - \int_0^s\frac{t - t\wedge v}{1-v}\,dv + \int_0^s dv\int_0^t\frac{1 - u - v + u\wedge v}{(1-v)(1-u)}\,du =\\
&= s - I_1 - I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Con pazienza, dato che $v - u\wedge v = 0$ per $u \ge v$,

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^s dv\int_0^t\frac{1}{1-v} - \frac{v - u\wedge v}{(1-v)(1-u)}\,dv =\\
&= \int_0^s\frac{t}{1-v}\,dv - \int_0^s dv\int_0^v\frac{v-u}{(1-v)(1-u)}\,du.
\end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned}
\int_0^v\frac{v-u}{(1-v)(1-u)}\,du &= \frac{1}{1-v}\int_0^v 1 - \frac{1-v}{1-u}\,du =\\
&= \frac{1}{1-v}\big(v + (1-v)\log(1-v)\big) = \frac{v}{1-v} + \log(1-v).
\end{aligned}$$

In conclusione

$$I_3 = \int_0^s\frac{t-v}{1-v}\,dv - \int_0^s\log(1-v)\,dv = I_2 + (1-s)\log(1-s) + s.$$

Dato che $s < t$,

$$I_1 = \int_0^t\frac{s - s\wedge u}{1-u}\,du = \int_0^s\frac{s-u}{1-u}\,du = \int_0^s 1 - \frac{1-s}{1-u}\,du = s + (1-s)\log(1-s)$$

per cui $I_3 - I_1 - I_2 = 0$ e quindi $\mathrm{E}(\tilde B_t \tilde B_s) = s$. Gli altri casi $s < 1 < t$ e $1 \le s < t$ si trattano in maniera simile.

b) $\tilde B$ non è un $(\mathcal{F}_t)_t$-moto browniano: non è neanche adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$. Infatti, per $t < 1$,

$$\tilde B_t = \underbrace{B_t + \int_0^t \frac{B_u}{1-u}\,du}_{} + B_1 \log(1-t).$$

Ora la v.a. indicata dalla parentesi graffa è $\mathcal{F}_t$-misurabile; se $\tilde B_t$ fosse $\mathcal{F}_t$-misurabile, tale sarebbe anche la v.a. B_1, in contraddizione con il fatto che $B_1 - B_t$ sia indipendente da $\mathcal{F}_t$.

Per dimostrare che $\tilde B$ è un moto browniano rispetto a $(\tilde{\mathcal{G}}_t)_t$, basta verificare che $\tilde B_t - \tilde B_s$ è indipendente da $\tilde{\mathcal{G}}_s$, per $t \ge s$. Ora

$$\tilde B_t - \tilde B_s = B_t - B_s - \int_{s\wedge 1}^{t\wedge 1} \frac{B_1 - B_u}{1-u}\,du.$$

Dunque, se $v \le s$,

$$\mathrm{E}[(\tilde B_t - \tilde B_s)B_v] = \underbrace{\mathrm{E}[(B_t - B_s)B_v]}_{=0} - \int_{s\wedge 1}^{t\wedge 1} \frac{\mathrm{E}[B_1 B_v] - \mathrm{E}[B_u B_v]}{1-u}\,du = 0.$$

Infatti nell'integrale $\mathrm{E}[B_1 B_v] = \mathrm{E}[B_u B_v] = v$. In maniera simile si trova

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[(\tilde B_t - \tilde B_s)B_1] &= t\wedge 1 - s\wedge 1 - \int_{s\wedge 1}^{t\wedge 1} \frac{\mathrm{E}[B_1^2] - \mathrm{E}[B_u B_1]}{1-u}\,du =\\ &= t\wedge 1 - s\wedge 1 - \int_{s\wedge 1}^{t\wedge 1} \frac{1-u}{1-u}\,du = 0.\end{aligned}$$

Dunque $\tilde B_t - \tilde B_s$ è indipendente da ciascuna delle v.a. $B_v, v \le s$ e B_1. Dunque, per l'Esercizio 2.1 c), anche dalla σ-algebra generata, cioè da $\tilde{\mathcal{G}}_s$.

S2.12 Si ha

$$\lambda(S_A) = \int_0^{+\infty} 1_{\{B_t \in A\}}\,dt.$$

Quindi, per il Teorema di Fubini,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\lambda(S_A)) &= \mathrm{E}\Big[\int_0^{+\infty} 1_{\{B_t\in A\}}\,dt\Big] = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(B_t \in A)\,dt =\\ &= \int_0^{+\infty} (2\pi t)^{-m/2}\,dt \int_A e^{-\frac{|x|^2}{2t}}\,dx = \int_A dx \int_0^{+\infty} (2\pi t)^{-m/2} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}\,dt.\end{aligned}$$

Con i cambi di variabile $s = \frac{1}{t}$ prima e $u = \frac{1}{2}|x|^2 s$ poi, si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} (2\pi t)^{-m/2} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}\,dt &= (2\pi)^{-m/2} \int_0^{+\infty} s^{-2+\frac{m}{2}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2 s}\,ds =\\ &= (2\pi)^{-m/2} \int_0^{+\infty} \Big(\tfrac{2u}{|x|^2}\Big)^{-2+\frac{m}{2}} e^{-u} \tfrac{2}{|x|^2}\,du =\\ &= \pi^{-m/2} 2^{-1} |x|^{2-m} \int_0^{+\infty} u^{-2+\frac{m}{2}} e^{-u}\,du.\end{aligned}$$

Ma l'ultimo integrale diverge (in $0+$) se $-2 + \frac{m}{2} \le -1$, ovvero se $m \le 2$. Invece, se $m \ge 3$, esso vale $\Gamma(\frac{m}{2} - 1)$.

S3.1 Le condizioni a) e b) sono chiaramente necessarie. Viceversa, in vista di applicare il Teorema 0.11, sia $\mathcal{H}$ lo spazio delle v.a. W, $\mathcal{D}$-misurabili limitate e tali che

$$\mathrm{E}(WX) = \mathrm{E}(WZ). \tag{12.5}$$

Chiaramente $\mathcal{H}$ contiene la funzione 1 e le funzioni indicatrici degli eventi in $\mathcal{C}$. Inoltre se $(W_n)_n$ è una successione crescente di funzioni di $\mathcal{H}$ tutte maggiorate da un medesimo elemento $W^* \in \mathcal{H}$ e $W_n \uparrow W$, allora, si ha, per ogni n, $W_1 \le W_n \le W^*$. Poiché sia W_1 che W^* sono limitate (come tutte le funzioni di $\mathcal{H}$), applicando (due volte) il Teorema di Lebesgue

$$\mathrm{E}(WX) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(W_n X) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(W_n Z) = \mathrm{E}(WZ).$$

Dunque la condizione i) del Teorema 0.11 è soddisfatta e $\mathcal{H}$ contiene tutte le v.a. $\sigma(\mathcal{C})$-misurabili limitate; dunque la (12.5) vale per ogni v.a. W $\mathcal{D}$-misurabile limitata, cioè la tesi.

S3.2 L'asserzione a) sembrerebbe intuitiva: aggiungere l'informazione $\mathcal{D}$, che è indipendente da X e da $\mathcal{G}$, non dovrebbe fornire informazioni supplementari utili alla previsione di X. Per come l'esercizio è enunciato, il lettore però avrà sospettato che le cose non stanno proprio così. Cominciamo quindi col provare b); cercheremo poi un controesempio che mostri che la risposta ad a) è negativa.

b) Gli eventi della forma $G \cap D$, $G \in \mathcal{G}$, $D \in \mathcal{D}$, formano una classe stabile per l'intersezione finita, che genera $\mathcal{G} \vee \mathcal{D}$ e contenente Ω. Grazie all'Esercizio 3.1 basta dimostrare che

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}(X \mid \mathcal{G}) 1_{G\cap D}] = \mathrm{E}(X 1_{G\cap D}).$$

per ogni $G \in \mathcal{G}$, $D \in \mathcal{D}$. Poiché D è indipendente da $\sigma(X) \vee \mathcal{G}$ (e quindi anche da $\mathcal{G}$),

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}(X \mid \mathcal{G}) 1_{G\cap D}] = \mathrm{E}[\mathrm{E}(X 1_G \mid \mathcal{G}) 1_D] = \mathrm{E}(X 1_G)\mathrm{E}(1_D) \underset{\uparrow}{=} \mathrm{E}(X 1_G 1_D) = \mathrm{E}(X 1_{G\cap D}),$$

dove $\uparrow$ indica il passaggio in cui si usa l'indipendenza di D da $\sigma(X) \vee \mathcal{G}$.

a) Il controesempio è basato sul fatto che è possibile costruire delle v.a. X, Y, Z tali che le coppie (X, Y), (Y, Z) e (Z, X) siano ciascuna composta da v.a. indipendenti, senza che le v.a. X, Y, Z siano indipendenti. Un esempio è dato da $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, con la distribuzione uniforme di probabilità $\mathrm{P}(k) = \frac{1}{4}, k = 1, \dots, 4$ e la σ-algebra $\mathcal{F}$ di tutti i sottoinsiemi di Ω. Poniamo $X = 1_{\{1,2\}}$, $Y = 1_{\{2,4\}}$ e $Z = 1_{\{3,4\}}$. Allora si ha

$$\mathrm{P}(X = 1, Y = 1) = \mathrm{P}(\{1, 2\} \cap \{2, 4\}) = \mathrm{P}(2) = \frac{1}{16} = \mathrm{P}(X = 1)\mathrm{P}(Y = 1).$$

In modo analogo si mostra che $\mathrm{P}(X = i, Y = j) = \mathrm{P}(X = i)\mathrm{P}(Y = j)$ per ogni possibile valore di $i, j \in \{0, 1\}$, il che implica che X e Y sono indipendenti. Allo stesso modo si vede che (X, Z) e (Y, Z) sono coppie di v.a. indipendenti. Poniamo $\mathcal{G} = \sigma(Y)$ e $\mathcal{D} = \sigma(Z)$. Allora la σ-algebra $\mathcal{G} \vee \mathcal{D}$ contiene gli eventi

$$\begin{aligned} \{1\} &= \{Y = 0, Z = 0\}, \qquad & \{2\} &= \{Y = 1, Z = 0\}, \\ \{3\} &= \{Y = 0, Z = 1\}, \qquad & \{4\} &= \{Y = 1, Z = 1\} \end{aligned}$$

e dunque $\mathcal{G} \vee \mathcal{D} = \mathcal{F}$. Dunque $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{G} \vee \mathcal{D}] = X$, mentre, poiché X e $\mathcal{G}$ sono indipendenti, $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}$ q.c.

S3.3 a) Ogni evento $A \in \sigma(X)$ è della forma $A = \{X \in A'\}$ con $A' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Intanto osserviamo che $\{X = x\}$ è un evento di $\sigma(X)$, poiché $\{x\}$ è un boreliano. Perché A sia contenuto strettamente in $\{X = x\}$, A' deve essere contenuto strettamente in $\{x\}$, il che non è possibile, a meno che sia $A' = \emptyset$.

b) Se A è un atomo di $\mathcal{G}$ e Y non fosse costante su A, allora esisterebbero almeno due valori distinti y, z che vengono assunti da Y su A. Ma allora i due eventi $\{Y = y\} \cap A$ e $\{Y = z\} \cap A$ sarebbero $\mathcal{G}$-misurabili, non vuoti e strettamente contenuti in A, contro l'ipotesi che A sia un atomo.

c) W è $\sigma(X)$-misurabile e quindi costante su $\{X = x\}$, come conseguenza di a) e b). Il valore c di questa costante resta determinato dalla relazione

$$c\mathrm{P}(X = x) = \mathrm{E}(W 1_{\{X=x\}}) = \mathrm{E}(Y 1_{\{X=x\}}) = \int_{\{X=x\}} Y \, d\mathrm{P}.$$

S3.4 a) Si ha $\mathrm{E}(h(X) \mid Y) = g(Y)$, dove g è tale che

$$\mathrm{E}[h(X)\psi(Y)] = \mathrm{E}[g(Y)\psi(Y)]$$

Ma $\mathrm{E}[h(X)\psi(Y)] = \mathrm{E}[h(Z)\psi(Y)]$ e dunque anche $\mathrm{E}(h(Z) \mid Y) = g(Y)$.

b) Le v.a. (T_1, T) e (T_2, T) hanno la stessa legge. Infatti (T_1, T) si può ottenere applicando alla v.a. $(T_1, T_2 + \dots + T_n)$ l'applicazione $(s, t) \to (s, s + t)$. (T_2, T) si ottiene applicando alla v.a. $(T_2, T_1 + T_3 \dots + T_n)$ la stessa applicazione. Poiché le due v.a. $(T_1, T_2 + \dots + T_n)$ e $(T_2, T_1 + T_3 \dots + T_n)$ hanno la stessa legge (hanno le stesse marginali e le componenti sono indipendenti), (T_1, T) e (T_2, T) hanno la stessa legge.

Dunque $\mathrm{E}(T_1 \mid T) = \mathrm{E}(T_2 \mid T)$ q.c., grazie al punto a). Per lo stesso motivo si ha anche $\mathrm{E}(T_1 \mid T) = \dots = \mathrm{E}(T_n \mid T)$ q.c. e dunque, sempre q.c.,

$$n\mathrm{E}(T_1 \mid T) = \mathrm{E}(T_1 \mid T) + \dots + \mathrm{E}(T_n \mid T) = \mathrm{E}(T_1 + \dots + T_n \mid T) = \mathrm{E}(T \mid T) = T$$

S3.5 Si ha

$$\begin{aligned} \mu_{\mathrm{Q}}(A) = \mathrm{Q}(Y \in A) = \mathrm{E}^{\mathrm{P}}(X 1_{\{Y \in A\}}) &= \mathrm{E}^{\mathrm{P}}[\mathrm{E}^{\mathrm{P}}(X 1_{\{Y \in A\}} \mid \sigma(Y))] = \\ &= \mathrm{E}^{\mathrm{P}}[1_{\{Y \in A\}} \mathrm{E}^{\mathrm{P}}(X \mid \sigma(Y))]. \end{aligned}$$

Sappiamo che esiste una funzione $f \geq 0$ tale che $\mathrm{E}^{\mathrm{P}}(X \mid \sigma(Y)) = f(Y)$. Con questa scelta si ha

$$\mu_{\mathrm{Q}}(A) = \mathrm{E}^{\mathrm{P}}[f(Y) 1_{\{Y \in A\}}] = \int_A f(y) \, d\mu_{\mathrm{P}}(y).$$

Questa relazione prova simultaneamente le due affermazioni da verificare (l'ultima uguaglianza è un'applicazione della Proposizione 0.1, d'integrazione rispetto a una legge immagine). La funzione f è determinata dalla relazione

$$\mathrm{E}(X\psi(Y)] = \mathrm{E}[f(Y)\psi(Y)]$$

per ogni funzione ψ misurabile limitata. Essa dunque non cambia se alle v.a. se ne sostituiscono altre due aventi la stessa legge congiunta.

S3.6 a) La legge condizionale, $n(y, dx)$, di X dato $Y = y$, deve soddisfare alla relazione

$$\int f(x) \, n(y, dx) = \mathrm{E}(f(X) \mid Y = y) = \mathrm{E}[f(\phi(Y) + Z) \mid Y = y] \tag{12.6}$$

per ogni funzione boreliana limitata f. Per il Lemma 3.9, la quantità a destra nella (12.6) vale $\mathrm{E}[f(\phi(y) + Z)]$. Dunque $n(y, dx)$ è la legge di $\phi(y) + Z$. (A voler essere precisi questa relazione, così come la (12.6) sono vere per quasi ogni y, rispetto alla legge di Y).

b) Sia $Z = X - AY$. La coppia (X, Y) è gaussiana e lo stesso vale per (Z, Y), che ne è una funzione lineare. Dunque, per mostrare l'indipendenza di Z e Y, basta verificare che $\mathrm{Cov}(Z_i, Y_j) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, p$. Supponiamo inizialmente, per semplificare le notazioni, che le medie m_X e m_Y siano nulle. La condizione di assenza di correlazione tra le componenti di Z e di Y si scrive allora

$$0 = \mathrm{E}(ZY^*) = \mathrm{E}[(X - AY)Y^*] = \mathrm{E}(XY^*) - A\mathrm{E}(YY^*) = C_{XY} - AC_Y.$$

Dunque $A = C_{XY}C_Y^{-1}$. Se togliamo l'ipotesi che le medie siano nulle, basta ripetere lo stesso calcolo con $X - m_X$ e $Y - m_Y$ al posto di X e Y. Possiamo scrivere ora

$$X = AY + (X - AY),$$

dove le v.a. $X - AY$ e Y sono indipendenti. Grazie al punto a), la legge condizionale di X dato $Y = y$ è la legge di $Ay + X - AY$. Poiché $X - AY$ è gaussiana, questa legge è caratterizzata dalla sua media

$$Ay + m_X - Am_Y = m_X - C_{XY}C_Y^{-1}(m_Y - y) \tag{12.7}$$

e dalla sua matrice di covarianza

$$\begin{aligned} C_{X-AY} &= C_X - C_{XY}A^* - AC_{YX} + AC_YA^* = \\ &= C_X - C_{XY}C_Y^{-1}C_{XY}^* - C_{XY}C_Y^{-1}C_{XY}^* + C_{XY}C_Y^{-1}C_YC_Y^{-1}C_{XY}^* = \\ &= C_X - C_{XY}C_Y^{-1}C_{XY}^*, \end{aligned} \tag{12.8}$$

dove ci siamo serviti del fatto che C_Y è simmetrica e della relazione $C_{YX} = C_{XY}^*$.

c) Dobbiamo trovare una funzione dell'osservazione, Y, che sia una buona approssimazione di X. Sappiamo (vedi l'Osservazione 3.5) che la v.a. $\phi(Y)$ che minimizza lo scarto $\mathrm{E}[(\phi(Y) - X)^2]$ è la speranza condizionale $\phi(Y) = \mathrm{E}(X \mid Y)$. Dunque, se misuriamo la qualità dell'approssimazione di X mediante $\phi(Y)$ misurando lo scarto con la norma L^2, la migliore approssimazione del valore di X è $\mathrm{E}(X \mid Y)$. Riprendendo i calcoli del punto b) con i valori

$$m_X = m_Y = 0, \quad C_{XY} = 1, \quad C_Y = 1 + \sigma^2$$

si ottiene

$$\mathrm{E}(X \mid Y = y) = \frac{y}{1+\sigma^2}.$$

d) Posto $Y = (Y_1, Y_2)$, $y = (y_1, y_2)$, si ha $m_X = 0$, $m_Y = 0$, $C_X = 1$ e

$$C_Y = \begin{pmatrix} 1+\sigma^2 & 1 \\ 1 & 1+\sigma^2 \end{pmatrix}, \qquad C_{X,Y} = (1, 1).$$

Si calcola immediatamente

$$C_Y^{-1} = \frac{1}{(1+\sigma^2)^2 - 1} \begin{pmatrix} 1+\sigma^2 & -1 \\ -1 & 1+\sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Dunque la legge condizionale ha media

$$C_{X,Y}C_Y^{-1}y = \frac{1}{2\sigma^2 + \sigma^4}(1, 1) \begin{pmatrix} (1+\sigma^2)y_1 - y_2 \\ (1+\sigma^2)y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \frac{y_1 + y_2}{2+\sigma^2}$$

e varianza

$$1 - C_{X,Y}C_Y^{-1}C_{X,Y}^* = 1 - \frac{1}{2\sigma^2 + \sigma^4}(1, 1)\begin{pmatrix} \sigma^2 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} = 1 - \frac{2}{2+\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{2+\sigma^2}$$

Nella situazione di c), la varianza della legge condizionale del segnale data l'osservazione valeva invece $\sigma^2(1+\sigma^2)^{-1}$.

e) Si tratta di applicare la formula trovata in b) a $X = (B_{t_1}, \dots, B_{t_m})$, $Y = B_1$. Si ha immediatamente $C_Y = 1$, $C_Y^{-1} = 1$, mentre

$$C_{X,Y} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}$$

Dunque la matrice $C_{X,Y}C_Y^{-1}C_{X,Y}^*$ ha t_it_j come elemento di posto ij. Dato che C_X è la matrice $(t_i \wedge t_j)_{i,j}$, la legge condizionale e gaussiana di matrice di covarianza $C_X - C_{X,Y}C_Y^{-1}C_{X,Y} = (t_i \wedge t_j - t_it_j)_{i,j}$ ovvero

$$\begin{pmatrix} t_1(1-t_1) & t_1(1-t_2) & \dots & t_1(1-t_m) \\ t_1(1-t_2) & t_2(1-t_2) & \dots & t_2(1-t_m) \\ & & \ddots & \\ t_1(1-t_m) & t_2(1-t_m) & \dots & t_m(1-t_m) \end{pmatrix}$$

e di media (qui $\mathrm{E}(X) = 0$, $\mathrm{E}(Y) = 0$)

$$C_{X,Y}C_Y^{-1}y = \begin{pmatrix} t_1 y \\ \vdots \\ t_m y \end{pmatrix}.$$

f) Ora invece

$$C_Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & v \end{pmatrix}, \qquad C_Y^{-1} = \frac{1}{v-1}\begin{pmatrix} v & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_{X,Y} = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ t_m & t_m \end{pmatrix}$$

per cui

$$C_{X,Y}C_Y^{-1} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ t_m & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$C_{X,Y}C_Y^{-1}C_{X,Y} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ t_m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix}$$

che è ancora la matrice di elementi t_it_j. Dunque la matrice di covarianza della legge condizionale è la stessa che in c). E lo stesso vale per la media che è

$$C_{X,Y}C_Y^{-1}\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 y \\ \vdots \\ t_m y \end{pmatrix}$$

In conclusione la legge condizionale non dipende né da x né da v e coincide con la legge condizionale dato $B_1 = y$. Da un punto di vista intuitivo ciò non è sorprendente dato che aggiungere l'informazione $B_v = x$ significa aggiungere l'informazione $B_v - B_1 = x - y$. Dato che gli incrementi del moto browniano sono indipendenti dal passato sarebbe stato ragionevole aspettarsi che l'aggiunta di questa nuova informazione non avrebbe mutato la legge condizionale. Anzi, questo fatto avrebbe potuto essere ottenuto direttamente usando l'Esercizio 3.2 b).

S3.7 Grazie all'Esercizio 2.4 la legge congiunta à gaussiana. Per identificarla basta quindi calcolare le medie e la matrice di covarianza. Le due v.a. sono evidentemente centrate. Calcoliamo le varianze

$$\mathrm{E}\Big[\Big(\int_0^1 B_s\,ds\Big)^2\Big] = \mathrm{E}\Big[\int_0^1 B_s\,ds \cdot \int_0^1 B_t\,dt\Big] = \mathrm{E}\Big[\int_0^1\int_0^1 B_s B_t\,ds\,dt\Big] =$$
$$= \int_0^1\int_0^1 s\wedge t\,ds\,dt = \int_0^1 dt\int_0^t s\,ds + \int_0^1 dt\int_t^1 t\,ds = I_1 + I_2.$$

Si calcola facilmente

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^2}{2}\,dt = \frac{1}{6}$$

e analogamente $I_2 = \frac{1}{6}$; dunque la varianza vale $\frac{1}{3}$. La varianza di B_1 vale naturalmente 1, mentre per la covarianza si trova

$$\mathrm{E}\Big[B_1\int_0^1 B_s\,ds\Big] = \int_0^1 \mathrm{E}(B_1 B_s)\,ds = \int_0^1 s\,ds = \frac{1}{2}\cdot$$

La matrice di covarianza di B_1 e $\int_0^1 B_s\,ds$ è dunque

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

La migliore stima in L^2 del valore di B_1 sapendo che $\int_0^1 B_t\,dt = x$ è data dalla media condizionale che (vedi Esercizio 3.6 b)) vale $\frac{3}{2}x$.

S3.8 a) Poiché η è indipendente da B_s, $\mathrm{Cov}(\eta, Y_s) = \mathrm{Cov}(\eta, \eta s) + \mathrm{Cov}(\eta, \sigma B_s) = s\rho^2$. Per lo stesso motivo

$$\mathrm{Cov}(Y_s, Y_t) = \mathrm{Cov}(\eta s, \eta t) + \mathrm{Cov}(\sigma B_s, \sigma B_t) = st\rho^2 + (s\wedge t)\sigma^2.$$

b) Basta osservare che $(\eta, B_t, t \ge 0)$ costituisce una famiglia gaussiana. Dunque per ogni $t_1, \dots, t_m$ il vettore $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_m})$ è gaussiano come funzione lineare di $(\eta, B_{t_1}, \dots, B_{t_m})$.

c) λ deve soddisfare, per $s \le t$, alla relazione $\mathrm{Cov}(\eta - \lambda Y_t, Y_s)$. Ma

$$\mathrm{Cov}(\eta - \lambda Y_t, Y_s) = \mathrm{Cov}(\eta, Y_s) - \mathrm{Cov}(\lambda Y_t, Y_s) = s\rho^2 - \lambda(st\rho^2 + s\sigma^2)$$

e dunque deve essere

$$\lambda = \frac{\rho^2}{\sigma^2 + t\rho^2}\cdot$$

Con questa scelta di λ, la v.a. $Z = \eta - \lambda Y_t$ è non correlata dalle v.a. $Y_s, s \le t$. Poiché queste ultime generano la σ-algebra $\mathcal{G}_t$ e $(\eta, Y_t, t \ge 0)$ è una famiglia gaussiana, per l'Esercizio 2.1 c) Z è indipendente da $\mathcal{G}_t$.

d) Poiché Y_t è $\mathcal{G}_t$-misurabile e Z è indipendente da $\mathcal{G}_t$,

$$\mathrm{E}[\eta \mid \mathcal{G}_t] = \mathrm{E}[\lambda Y_t + Z \mid \mathcal{G}_t] = \lambda Y_t + \mathrm{E}[Z] = \lambda Y_t + \mathrm{E}[\eta - \lambda Y_t] =$$
$$= \frac{\rho^2 Y_t}{\sigma^2 + t\rho^2} + \mu\Big(1 - \frac{t\rho^2}{\sigma^2 + t\rho^2}\Big) = \frac{\rho^2 Y_t + \sigma^2\mu}{\sigma^2 + t\rho^2}.$$

Si ha $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} B_t = 0$ q.c. per la legge del logaritmo iterato, dato che, per t grande, $|B_t| \le ((2+\varepsilon)t\log\log t)^{1/2}$; quindi

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{E}[\eta \mid \mathcal{G}_t] = \lim_{t\to+\infty} \frac{\rho^2 Y_t}{\sigma^2 + t\rho^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\rho^2}{\sigma^2 + t\rho^2}(\eta t + \sigma B_t) = \eta \qquad \text{q.c.}$$

S3.9 Mostriamo che la v.a. $|X|$ ha densità. Per ogni $R > 0$ si ha, in coordinate polari,

$$\mathrm{P}(|X| \le R) = \int_{\{|x|\le R\}} f(x)\,dx = \int_{S_{n-1}} d\theta \int_0^R g(\rho)\rho^{n-1}\,d\rho =$$
$$= \omega_{n-1}\int_0^R g(\rho)\rho^{n-1}\,d\rho$$

dove S_{n-1} è la superficie della sfera di $\mathbb{R}^n$ e ω_{n-1} indica la misura $n-1$-dimensionale di S_{n-1}. Se ne deduce che $|X|$ ha densità

$$g_1(t) = \omega_{n-1} g(t) t^{n-1}.$$

Sappiamo che ogni v.a. W $\sigma(|X|)$-misurabile è della forma $W = h(|X|)$ e dunque, sempre in coordinate polari,

$$\mathrm{E}[\phi(X)W] = \mathrm{E}[\phi(X)h(|X|)] = \int \phi(x)h(|x|)g(|x|)\,dx =$$
$$= \int_{S_{n-1}} d\theta \int \phi(\rho,\theta)h(\rho)g(\rho)\rho^{n-1}\,d\rho = \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{S_{n-1}} d\theta \int \phi(t,\theta)h(t)g_1(t)\,dt =$$
$$= \int h(t)g_1(t)\,dt\Big(\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{S_{n-1}} \phi(t,\theta)\,d\theta\Big) = \mathrm{E}(\tilde\phi(|X|)W)$$

dove
$$\tilde\phi(t)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{S_{n-1}}\phi(t,\theta)d\theta.$$
Dunque
$$\mathrm{E}(\phi(X)\mid |X|)=\tilde\phi(|X|)\qquad \text{q.c.}$$
($\tilde\phi(t)$ è la media di $\phi(t,\cdot)$ sulla superficie della sfera di raggio 1).

S3.10 a) Se $G=\{\mathrm{E}(Z\mid\mathcal{G})=0\}$, allora $G\in\mathcal{G}$ e quindi $\mathrm{E}(Z1_G)=\mathrm{E}[\mathrm{E}(Z\mid\mathcal{G})1_G]=0$. Poiché $Z\ge 0$, ciò implica $Z=0$ su G e dunque $\{Z=0\}\supset\{\mathrm{E}(Z\mid\mathcal{G})=0\}$ q.c. Inoltre
$$\mathrm{E}[ZY\mid\mathcal{G}]=\mathrm{E}[Z1_{\{Z>0\}}Y\mid\mathcal{G}]\le\mathrm{E}[Z1_{\{\mathrm{E}(Z\mid\mathcal{G})>0\}}Y\mid\mathcal{G}]=\mathrm{E}[ZY\mid\mathcal{G}]1_{\{\mathrm{E}(Z\mid\mathcal{G})>0\}}.$$
Poiché la disuguaglianza opposta è ovvia, la (3.15) è provata.

b) Evidentemente $\mathrm{Q}(Z=0)=\mathrm{E}(Z1_{\{Z=0\}})=0$. Poiché gli eventi di probabilità nulla per P sono di probabilità nulla anche per Q, si ha $\{Z=0\}\supset\{\mathrm{E}(Z\mid\mathcal{G})=0\}$ Q-q.c. Dunque $\mathrm{Q}(\mathrm{E}(Z\mid\mathcal{G})=0)\le\mathrm{Q}(Z=0)=0$.

Per ogni v.a. W $\mathcal{G}$-misurabile limitata,
$$\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}\Big[\frac{\mathrm{E}(YZ\mid\mathcal{G})}{\mathrm{E}(Z\mid\mathcal{G})}W\Big]=\mathrm{E}\Big[\frac{\mathrm{E}(YZ\mid\mathcal{G})}{\mathrm{E}(Z\mid\mathcal{G})}ZW\Big].$$
Poiché all'interno della speranza matematica a destra Z è la sola v.a. che non sia $\mathcal{G}$-misurabile,
$$\dots=\mathrm{E}\Big[\frac{\mathrm{E}(YZ\mid\mathcal{G})}{\mathrm{E}(Z\mid\mathcal{G})}\mathrm{E}(Z\mid\mathcal{G})W\Big]=\mathrm{E}[\mathrm{E}(YZ\mid\mathcal{G})W]=\mathrm{E}(YZW)=\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}(YW).$$
Dato che il secondo membro nella (3.16) è $\mathcal{G}$-misurabile, la (3.16) è verificata.

• Nella soluzione dell'Esercizio 3.10 abbiamo lasciato un po' in sordina un punto delicato che richiede molta attenzione. Bisogna sempre ricordare che una speranza condizionale (rispetto a una probabilità P) *non* è una v.a., ma una famiglia di v.a., che differiscono tra di loro solo per insiemi P-trascurabili. Quindi la quantità $\mathrm{E}^{\mathrm{P}}[Z\mid\mathcal{G}]$ va considerata con cautela quando si ragiona rispetto a una probabilità Q diversa da P, dato che potrebbe succedere che un evento P-trascurabile non sia Q-trascurabile. In questo caso non ci sono difficoltà perché $\mathrm{P}\gg\mathrm{Q}$.

S3.11 Si tratta di dimostrare che, per ogni $A'\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, $D\in\mathcal{D}$
$$\mathrm{P}(\{X\in A'\}\cap D)=\mathrm{P}(X\in A')\mathrm{P}(D).$$
Poiché $1_{\{X\in A'\}}=1_{A'}(X)$, questa relazione è provata se mostriamo che le v.a. $1_{A'}(X)$ e 1_D sono indipendenti. Mostriamo anzi che, per ogni v.a. W reale $\mathcal{D}$-misurabile, le v.a. X e W sono indipendenti. La funzione caratteristica della coppia $Z=(X,W)$ calcolata in $\theta=(\lambda,t)$, $\lambda\in\mathbb{R}^m$, $t\in\mathbb{R}$, vale
$$\mathrm{E}(e^{i\langle\theta,Z\rangle})=\mathrm{E}(e^{i\langle\lambda,X\rangle}e^{itW})=\mathrm{E}[e^{itW}\mathrm{E}(e^{i\langle\lambda,X\rangle}\mid\mathcal{D})]=\mathrm{E}(e^{itW})\mathrm{E}(e^{i\langle\lambda,X\rangle})$$
e X e W sono indipendenti per il criterio 7 del paragrafo 0.6.

S3.12 a) Basta osservare che le σ-algebre $\mathcal{G}_1=\sigma(B_1(u),u\ge 0)$ e $\mathcal{G}_2=\sigma(B_2(u),u\ge 0)$ sono indipendenti (vedi paragrafo 2.6) e τ è $\mathcal{G}_2$-misurabile.

b) Usiamo il Lemma 3.9. Indichiamo con B_1 l'applicazione da Ω in $\mathcal{C}=\mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ che ad ogni ω associa la traiettoria $(t\to B_1(t,\omega))$ e con ψ l'applicazione $\mathbb{R}^+\times\mathcal{C}\to\mathbb{R}$ definita da $\psi(t,x)=f(x_t)$. Allora $f(B_1(\tau))=\psi(\tau,B_1)$. Per il Lemma 3.9
$$\mathrm{E}[f(B_1(\tau))\mid\sigma(\tau)]=\mathrm{E}[\psi(\tau,B_1)\mid\sigma(\tau)]=\Phi(\tau)$$
dove
$$\Phi(t)=\mathrm{E}[\psi(t,B_1)]=\mathrm{E}[f(B_1(t))]=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-x^2/2t}\,dx.$$
c) Se riusciamo a determinare una funzione g tale che, per ogni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ boreliana limitata si abbia
$$\mathrm{E}[f(B_\tau)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g(x)\,dx$$
allora, per la regola d'integrazione rispetto a una legge immagine, Proposizione 0.1, g è la densità della legge di B_τ. Ora, se con μ_τ indichiamo la legge di τ,
$$\begin{aligned}\mathrm{E}[f(B_\tau)]&=\mathrm{E}[\mathrm{E}[f(B_1(\tau))\mid\sigma(\tau)]]=\mathrm{E}[\Phi(\tau)]=\\&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\,d\mu_\tau(t)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-x^2/2t}\,dx.\end{aligned}$$
μ_τ ha una densità rispetto alla misura di Lebesgue, che è stata calcolata nell'Esercizio 2.7. Sostituendone l'espressione e applicando il Teorema di Fubini si trova
$$\begin{aligned}\mathrm{E}[f(B_\tau)]&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\frac{a}{\sqrt{2\pi}\,t^{3/2}}e^{-a^2/2t}\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-x^2/2t}\,dx=\\&=\frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}e^{-(a^2+x^2)/2t}\,dt.\end{aligned}$$
Con il cambio di variabile $s=\frac{1}{t}$ si completa il calcolo facilmente:
$$\mathrm{E}(f(B_\tau))=\frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx\int_0^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(a^2+x^2)s}\,ds=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\frac{1}{a^2+x^2}\,dx.$$

Se ne deduce che $B_1(\tau)$ ha densità

$$g(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} \cdot$$

Per $a = 1$ è quella che si chiama una *legge di Cauchy*.

S4.1 Se X è una supermartingala allora, per ogni $t > s$, si ha $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \le X_s$ q.c. Quindi la v.a. $U = X_s - E(X_t \mid \mathcal{F}_t)$ è ≥ 0 q.c.; ma essa ha media nulla, poiché

$$E[E(X_t \mid \mathcal{F}_s)] = E(X_t) = E(X_s).$$

Se ne deduce che $U = 0$ q.c. (una v.a. ≥ 0 e di media nulla è $= 0$ q.c.). Dunque $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$ q.c. per ogni $t > s$.

S4.2 Se X è una martingala la proprietà è una conseguenza del teorema d'arresto (Corollario 4.4). Viceversa, per mostrare la proprietà di martingala, occorre provare che, se $t > s$, per ogni $A \in \mathcal{F}_s$

$$E(X_t 1_A) = E(X_s 1_A). \qquad (12.9)$$

L'idea è di trovare due tempi d'arresto limitati τ_1, τ_2 tali che dalla relazione $E[X_{\tau_1}] = E[X_{\tau_2}]$ si ricavi la (12.9). Scegliamo, per $A \in \mathcal{F}_s$ fissato,

$$\tau_1(\omega) = \begin{cases} s & \text{se } \omega \in A \\ t & \text{se } \omega \in A^c \end{cases}$$

e $\tau_2 \equiv t$; τ_1 è un tempo d'arresto; infatti

$$\{\tau_1 \le u\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } u < s \\ A & \text{se } s \le u < t \\ \Omega & \text{se } u \ge t \end{cases}$$

e dunque, in ogni caso, $\{\tau_1 \le u\} \in \mathcal{F}_u$ per ogni u. Ma $X_{\tau_1} = X_s 1_A + X_t 1_{A^c}$ e la relazione $E[X_{\tau_1}] = E[X_t]$ si scrive

$$E[X_s 1_A] + E[X_t 1_{A^c}] = E[X_{\tau_1}] = E[X_t] = E[X_t 1_A] + E[X_t 1_{A^c}],$$

da cui, sottraendo, si ricava la (12.9).

S4.3 a) Se $s \le t$, poiché l'evento $\{M_s = 0\}$ è $\mathcal{F}_s$-misurabile, si ha

$$E(1_{\{M_s=0\}} M_t) = E(1_{\{M_s=0\}} M_s) = 0.$$

Poiché $M_t \ge 0$, deve essere $M_t = 0$ q.c. su $\{M_s = 0\}$, cioè il risultato cercato.

b) Sia $\tau = \inf\{t;\, M_t = 0\}$; si tratta di provare che $P(\tau \le T) = 0$. Per il teorema d'arresto, poiché M è continua, $M_\tau = 0$ su $\{\tau \le T\}$ e quindi

$$E(M_T) = E(M_{T\wedge\tau}) = E(M_T 1_{\{\tau > T\}})$$

Poiché $M_T > 0$ q.c., deve essere $P(\tau > T) = 1$, cioè la tesi.

S4.4 a) Si ha, ricordando l'Esercizio 0.10,

$$E(e^{\langle\lambda, B_t\rangle - \frac{1}{2}|\lambda|^2 t}) = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2 t} E(e^{\langle\lambda, B_t\rangle}) = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2 t} e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2 t} = 1.$$

b) Sia $s < t$. Poiché B_s è $\mathcal{F}_s$-misurabile mentre $B_t - B_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$,

$$\begin{aligned} E(X_t \mid \mathcal{F}_s) &= E(e^{\langle\lambda, B_s\rangle + \langle\lambda, B_t - B_s\rangle - \frac{1}{2}|\lambda|^2 t} \mid \mathcal{F}_s) = \\ &= e^{\langle\lambda, B_s\rangle - \frac{1}{2}|\lambda|^2 t} E(e^{\langle\lambda, B_t - B_s\rangle} \mid \mathcal{F}_s) = e^{\langle\lambda, B_s\rangle - \frac{1}{2}|\lambda|^2 t} E(e^{\langle\lambda, B_t - B_s\rangle}) = \\ &= e^{\langle\lambda, B_s\rangle - \frac{1}{2}|\lambda|^2 t} e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2 (t-s)} = e^{\langle\lambda, B_s\rangle - \frac{1}{2}|\lambda|^2 s} = X_s. \end{aligned}$$

c) Per la legge del logaritmo iterato si ha $B_t(\omega) \le ((2+\varepsilon) t \log\log t)^{1/2}$, per t grande. Dunque $\lambda B_t - \frac{1}{2}|\lambda|^2 t \to -\infty$ q.c. per $t \to +\infty$ e

$$X_t = e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}|\lambda|^2 t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0 \quad \text{q.c.}$$

d) Se la martingala $(X_t)_t$ fosse uniformemente integrabile, essa convergerebbe a 0 anche in L^1. Ma ciò non è possibile, perché $E(X_t) = E(X_0) = 1$ per ogni $t \ge 0$.

S4.5 In realtà il primo punto è già stato provato nel paragrafo 4.6, vedi l'Osservazione successiva al Teorema 4.24. Facciamo comunque una dimostrazione diretta. Se $s \le t$, poiché B_s è $\mathcal{F}_s$-misurabile mentre $B_t - B_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$,

$$\begin{aligned} E(Y_t \mid \mathcal{F}_s) &= E[(B_s + (B_t - B_s))^2 \mid \mathcal{F}_s] - t = \\ &= E[B_s^2 + 2B_s(B_t - B_s) + (B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] - t = \\ &= B_s^2 + 2B_s \underbrace{E(B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s)}_{=0} + \underbrace{E[(B_t - B_s)^2]}_{=t-s} - t = B_s^2 - s = Y_s. \end{aligned}$$

Per la legge del logaritmo iterato, come in c) dell'Esercizio 4.4, si ha $Y_t \to -\infty$ per $t \to +\infty$. $(Y_t)_t$ non può essere uniformemente integrabile perché allora convergerebbe q.c. e in L^1.

S4.6 a) Si ha

$$\begin{aligned} E[(M_t - M_s)^2] &= E[E[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s]] = E[E[M_t^2 - 2M_t M_s + M_s^2 \mid \mathcal{F}_s]] = \\ &= E[M_t^2 - M_s^2] \end{aligned}$$

poiché $E[2M_tM_s \mid \mathcal{F}_s] = 2M_sE[M_t \mid \mathcal{F}_s] = 2M_s^2$.

b) Supponiamo $M_0 = 0$ per semplicità. Ciò è possibile perché le due martingale $(M_t)_t$ e $(M_t - M_0)_t$ hanno lo stesso processo crescente. Osserviamo che il processo crescente proposto si annulla in 0. Si ha poi

$$E[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s] = E[(M_t - M_s + M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = E[(M_t - M_s)^2 + 2(M_t - M_s)M_s + M_s^2 \mid \mathcal{F}_s].$$

Ma $E[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = E[(M_t - M_s)^2] = E[M_t^2 - M_s^2]$, poiché M è a incrementi indipendenti mentre $E[(M_t - M_s)M_s \mid \mathcal{F}_s] = M_sE[M_t - M_s \mid \mathcal{F}_s] = 0$. Dunque

$$E[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s] = M_s^2 + E[M_t^2 - M_s^2]$$

da cui segue che $Z_t = M_t^2 - E(M_t^2)$ è una martingala, ovvero che $\langle M\rangle_t = E[M_t^2]$.

c) Supponiamo che $(M_t)_t$ sia una martingala continua di quadrato integrabile rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$. Sappiamo già che il processo crescente rispetto alla filtrazione naturale è $A_t = E(M_t^2 - M_0^2)$. Questa questione sarebbe una conseguenza dell'Osservazione successiva al Teorema 4.24 se le due filtrazioni ($(\mathcal{F}_t)_t$ e quella naturale) fossero completate con gli eventi di probabilità 0 di $\mathcal{F}$. Altrimenti basta completarle e osservare che, per l'Osservazione p. 55, $(M_t)_t$ resta una martingala rispetto alle filtrazioni completate.

d) Sappiamo (Esercizio 2.1 c)) che $M_t - M_s$ è indipendente da $\mathcal{G}_s = \sigma(X_u, u \le s)$ se e solo se, per ogni $u \le s$,

$$E[(M_t - M_s)M_u] = E[M_t - M_s]E[M_u] = 0.$$

Ma questa relazione segue immediatamente dal fatto che M è una martingala. Poiché il processo crescente $\langle M\rangle$ è deterministico, se $t > s$,

$$E(e^{\theta M_t - \frac{1}{2}\theta^2\langle M\rangle_t} \mid \mathcal{G}_s) = e^{\theta M_s - \frac{1}{2}\theta^2\langle M\rangle_t}E(e^{\theta(M_t - M_s)} \mid \mathcal{G}_s).$$

Ma $M_t - M_s$ è indipendente da $\mathcal{G}_s$ e, ricordando l'Esercizio 0.10,

$$E(e^{\theta(M_t - M_s)} \mid \mathcal{G}_s) = E(e^{\theta(M_t - M_s)}) = e^{\frac{1}{2}\theta^2 E[(M_t - M_s)^2]},$$

poiché $M_t - M_s$ è gaussiana e centrata. Poiché $E[(M_t - M_s)^2] = E[M_t^2 - M_s^2] = \langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s$,

$$E(e^{\theta M_t - \frac{1}{2}\theta^2\langle M\rangle_t} \mid \mathcal{G}_s) = e^{\theta M_s - \frac{1}{2}\theta^2\langle M\rangle_s}.$$

S4.7 a) Per il teorema d'arresto si ha $1 = M_0 = E(M_{t\wedge\tau_a} \mid \mathcal{F}_0)$. Se $\tau_a = +\infty$

$$\lim_{t\to+\infty} M_{t\wedge\tau_a} = \lim_{t\to+\infty} M_t = 0$$

mentre se $\tau_a < +\infty$ $M_{t\wedge\tau_a} \to M_{\tau_a} = a$ per $t \to +\infty$ (la martingala è continua). Mettendo insieme i due casi possibili, si ha la (4.18).

b) Sia $a > 1$. Poiché la martingala $(M_{t\wedge\tau_a})_t$ è limitata (è compresa tra 0 e a) e $E(M_{t\wedge\tau_a}) = E(M_0) = 1$, per il Teorema di Lebesgue,

$$1 = \lim_{t\to+\infty} E(M_{t\wedge\tau_a}) = aP(\tau_a < +\infty) = aP(M^* \ge a),$$

ovvero

$$P(M^* \ge a) = \tfrac{1}{a} = P\big(U \le \tfrac{1}{a}\big) = P\big(\tfrac{1}{U} \ge a\big). \tag{12.10}$$

Le due v.a. M^* e $\frac{1}{U}$ hanno la stessa funzione di ripartizione e dunque la stessa legge.

c) Dall'Esercizio 4.4 sappiamo che $M_t = e^{2\theta B_t - 2\theta^2 t}$ è una martingala continua che tende a zero per $t \to +\infty$. Grazie a (12.10) la funzione di ripartizione di X^* si calcola subito

$$P(X^* \le x) = P(2\theta X^* \le 2\theta x) = P\Big(\sup_{t\ge0} e^{2\theta B_t - 2\theta^2 t} \le e^{2\theta x}\Big) =$$
$$= P(M^* \le e^{2\theta x}) = 1 - P(M^* > e^{2\theta x}) = 1 - e^{-2\theta x}$$

e dunque X^* ha legge esponenziale di parametro 2θ.

S4.8 Sia $\lambda \ge 0$; sappiamo dall'Esercizio 4.4 che $M_t = e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}$ è una martingala. Allora $(M_{\tau_a\wedge t})_t$ è una martingala limitata perché $B_{\tau_a\wedge t} \le a$ e dunque $M_{\tau_a\wedge t} \le e^{\lambda a}$. Dunque si può applicare il Teorema di Lebesgue e, ricordando che $\tau_a < +\infty$ q.c.,

$$1 = E(M_0) = \lim_{t\to+\infty} E(e^{\lambda B_{\tau_a\wedge t} - \frac{1}{2}\lambda^2(\tau_a\wedge t)}) = e^{\lambda a}E[e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\tau_a}]$$

che dà $E[e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\tau_a}] = e^{-\lambda a}$, ovvero la (4.19). La trasformata di Laplace vale $+\infty$ su $\mathbb{R}^+$ come conseguenza del fatto che $E(\tau_a) = +\infty$ (vedi Esercizio 2.7), grazie alla disuguaglianza $\tau_a \le \frac{1}{\theta}e^{\theta\tau_a}$. Se $X_1, \dots, X_n$ sono v.a. i.i.d., tutte di legge uguale a quella di τ_a, allora la trasformata di Laplace di $n^{-2}(X_1 + \dots + X_n)$ è, per $\theta \le 0$,

$$\Big(\exp\Big(-a\sqrt{\tfrac{-2\theta}{n^2}}\Big)\Big)^n = e^{-a\sqrt{-2\theta}}.$$

Le leggi delle v.a. $n^{-2}(X_1 + \dots + X_n)$ e X_1 hanno la stessa trasformata di Laplace e dunque coincidono; ciò mostra che la legge di τ_a è stabile di esponente $\frac{1}{2}$.

S4.9 a) Abbiamo già visto più volte che il tempo d'arresto τ è q.c. finito, grazie alla legge del logaritmo iterato per esempio. Poiché B è una martingala, per il teorema d'arresto, Corollario 4.22, si ha

$$0 = E(B_0) = E(B_{t\wedge\tau}).$$

Facendo tendere $t \to +\infty$ e usando il Teorema di Lebesgue (si usano le disuguaglianze ovvie $-a \le B_{t\wedge\tau} \le b$) si ottiene

$$
\begin{aligned}
0 = \mathrm{E}(B_\tau) &= -a\mathrm{P}(B_\tau = -a) + b\mathrm{P}(B_\tau = b) = \\
&= -a\mathrm{P}(B_\tau = -a) + b(1 - \mathrm{P}(B_\tau = -a)) = b - (a+b)\mathrm{P}(B_\tau = -a)
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\mathrm{P}(B_\tau = -a) = \frac{b}{a+b} \qquad \mathrm{P}(B_\tau = b) = \frac{a}{a+b}.
$$

b) Ripetendo il ragionamento di a) si ha $0 = \mathrm{E}(X_{t\wedge\tau}) = \mathrm{E}(B^2_{t\wedge\tau} - (t\wedge\tau))$ e dunque

$$
\mathrm{E}(B^2_{t\wedge\tau}) = \mathrm{E}(t\wedge\tau).
$$

Passando al limite, a sinistra con il Teorema di Lebesgue e a destra con quello di Beppo Levi, si trova

$$
\mathrm{E}(\tau) = \mathrm{E}(B^2_\tau) = \frac{a^2b + b^2a}{a+b} = ab.
$$

S4.10 a) In maniera simile all'Esercizio 4.4 si mostra che il processo $M_t = \mathrm{e}^{i\lambda B_t + \frac{1}{2}\lambda^2 t}$ è una $(\mathscr{F}_t)_t$-martingala (complessa):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(M_t \mid \mathscr{F}_s) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}\mathrm{E}(\mathrm{e}^{i\lambda B_s}\mathrm{e}^{i\lambda(B_t - B_s)} \mid \mathscr{F}_s) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}\mathrm{e}^{i\lambda B_s}\mathrm{E}(\mathrm{e}^{i\lambda(B_t - B_s)}) = \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}\mathrm{e}^{i\lambda B_s}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)} = M_s.
\end{aligned}
$$

Ciò implica che la parte reale di M è anch'essa una martingala e basta osservare che $\operatorname{Re} M_t = \cos(\lambda B_t)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}$.

b) Applicando il teorema d'arresto al tempo di arresto limitato $\sigma_a \wedge t$ si ha

$$
1 = \mathrm{E}(X_0) = \mathrm{E}[\cos(\lambda B_{\sigma_a\wedge t})\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda^2(\sigma_a\wedge t)}]. \tag{12.11}
$$

Ma $|B_{\sigma_a\wedge t}| < a$; dunque, con le condizioni imposte a λ, $|\lambda B_{\sigma_a\wedge t}| < \frac{\pi}{2}$ e ricordando l'andamento della funzione coseno, $\cos(\lambda B_{\sigma_a\wedge t}) \ge \cos(\lambda a) > 0$. Se ne deduce che $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda^2(\sigma_a\wedge t)}) \le \cos(\lambda a)^{-1}$ e, mandando $t \to \infty$, per il Teorema di Beppo Levi la v.a. $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda^2\sigma_a}$ è integrabile. Grazie alla maggiorazione

$$
0 < \cos(\lambda B_{\sigma_a\wedge t})\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda^2(\sigma_a\wedge t)} \le \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda^2\sigma_a}
$$

si può applicare il Teorema di Lebesgue per $t \to +\infty$ nella (12.11). Poiché $\sigma_a < +\infty$ q.c. e $B_{\sigma_a} = a$, si ottiene

$$
\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda^2\sigma_a}) = \frac{1}{\cos(\lambda a)}
$$

da cui, sostituendo $\theta = \frac{1}{2}\lambda^2$, si ricava la (4.20).

c) La speranza matematica si può ottenere come derivata della trasformata di Laplace all'origine; quindi

$$
\mathrm{E}(\sigma_a) = \frac{d}{d\theta}\frac{1}{\cos(a\sqrt{2\theta})}\bigg|_{\theta=0} = a^2.
$$

Questo risultato era stato già ottenuto nell'Esercizio 4.9 b). Infine si verifica facilmente che, per $p \ge 0$ e $\varepsilon > 0$, si ha $x^p \le c(\varepsilon, p)\,\mathrm{e}^{\varepsilon x}$ per $x \ge 0$ (basta calcolare il massimo di $x \to x^p\mathrm{e}^{-\varepsilon x}$, che è $c(\varepsilon, p) = p^p\varepsilon^{-p}\mathrm{e}^{-p}$). Dunque $\sigma_a^p \le c(\varepsilon, p)\,\mathrm{e}^{\varepsilon\sigma_a}$. Basta ora scegliere un ε qualunque con $0 < \varepsilon < \frac{\pi^2}{8a^2}$.

d) Intanto si vede subito che $\theta = 0$ non è autovalore, perché le soluzioni di $\frac{1}{2}u'' = 0$ sono funzioni lineari-affini, che non possono annullarsi in due punti distinti senza essere identicamente nulle. Per $\theta \ne 0$ l'integrale generale dell'equazione

$$
\frac{1}{2}u'' - \theta u = 0
$$

è dato da $u(x) = c_1\mathrm{e}^{x\sqrt{2\theta}} + c_2\mathrm{e}^{-x\sqrt{2\theta}}$. Le condizioni al bordo impongono alle costanti le condizioni

$$
\begin{aligned}
c_1\mathrm{e}^{a\sqrt{2\theta}} + c_2\mathrm{e}^{-a\sqrt{2\theta}} &= 0 \\
c_1\mathrm{e}^{-a\sqrt{2\theta}} + c_2\mathrm{e}^{a\sqrt{2\theta}} &= 0.
\end{aligned}
$$

Questo sistema, nelle incognite c_1, c_2, ammette soluzioni diverse da quella nulla se e solo se si annulla il determinante della matrice

$$
\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{a\sqrt{2\theta}} & \mathrm{e}^{-a\sqrt{2\theta}} \\ \mathrm{e}^{-a\sqrt{2\theta}} & \mathrm{e}^{a\sqrt{2\theta}} \end{pmatrix}
$$

ovvero se e solo se $\mathrm{e}^{2a\sqrt{2\theta}} - \mathrm{e}^{-2a\sqrt{2\theta}} = 0$. Cioè deve essere $4a\sqrt{2\theta} = 2ik\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$. Quindi gli autovalori sono i numeri

$$
-\frac{k^2\pi^2}{8a^2} \qquad k = 1, 2, \dots
$$

Sono tutti negativi e il più grande è naturalmente $-\frac{\pi^2}{8a^2}$.

S4.11 a) Se $s \le t$ e $A \in \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$, allora si ha $\mathrm{Q}(A) = \mathrm{E}^{\mathrm{P}}(Z_t 1_A)$, ma anche $\mathrm{Q}(A) = \mathrm{E}^{\mathrm{P}}(Z_s 1_A)$, e quindi $\mathrm{E}^{\mathrm{P}}(Z_t \mid \mathscr{F}_s) = Z_s$.

b) Si ha $\mathrm{Q}(Z_t = 0) = \mathrm{E}^{\mathrm{P}}(Z_t 1_{\{Z_t = 0\}}) = 0$ e dunque $Z_t > 0$ Q-q.c. Inoltre, poiché (Esercizio 4.3) $\{Z_t > 0\} \subset \{Z_s > 0\}$ q.c., allora, per ogni $A \in \mathscr{F}_s$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}(1_A Z_t^{-1}) = \mathrm{E}^{\mathrm{Q}}(1_{A\cap\{Z_t>0\}} Z_t^{-1}) &= \mathrm{P}(A \cap \{Z_t > 0\}) \le \mathrm{P}(A \cap \{Z_s > 0\}) = \\
&= \mathrm{E}^{\mathrm{Q}}(1_A Z_s^{-1})
\end{aligned}
$$

e dunque $(Z_t^{-1})_t$ è una Q-supermartingala.

c) Se per di più $\mathrm{P} \ll \mathrm{Q}$, allora $\mathrm{P}(Z_t = 0) = 0$ e

$$\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}(Z_t^{-1}) = \mathrm{E}^{\mathrm{P}}(Z_t Z_t^{-1}) = 1.$$

La Q-supermartingala $(Z_t)_t$ ha dunque speranza matematica costante ed è una Q-martingala per il criterio dell'Esercizio 4.1. Alternativamente è immediato verificare che

$$\frac{d\mathrm{Q}_{|\mathscr{F}_t}}{d\mathrm{P}_{|\mathscr{F}_t}} = Z_t^{-1}$$

e $(Z_t^{-1})_t$ è una martingala per il punto a).

S4.12 a) Se $A \in \mathscr{F}_\tau$, allora $A \cap \{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n$ e

$$\mathrm{E}(X1_A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(X1_{A\cap\{\tau=n\}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(X_n 1_{A\cap\{\tau=n\}}) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(X_\tau 1_{A\cap\{\tau=n\}}) = \mathrm{E}(X_\tau 1_A).$$

b) Se $(\tau_n)_n$ è una successione di tempi d'arresto decrescente a τ e tale che τ_n prenda un insieme discreto di valori (vedi il Lemma 2.16), allora ripetendo la dimostrazione di a) si ha $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{F}_{\tau_n}) = X_{\tau_n}$. Poiché $(X_t)_t$ è continuo a destra, $X_{\tau_n} \overset{q.c.}{\to} X_\tau$ per $n \to \infty$. Inoltre la famiglia $(X_{\tau_n})_n$ è uniformemente integrabile per la Proposizione 4.14 e quindi $X_{\tau_n} \overset{L^1}{\to} X_\tau$. Poiché $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{F}_\tau) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(X \mid \mathscr{F}_{\tau_n}) \mid \mathscr{F}_\tau]$ se ne deduce che

$$\mathrm{E}(X \mid \mathscr{F}_\tau) = \mathrm{E}(X_{\tau_n} \mid \mathscr{F}_\tau) \underset{n\to\infty}{\to} \mathrm{E}(X_\tau \mid \mathscr{F}_\tau) = X_\tau.$$

S5.1 Indichiamo con $\mathscr{H}$ lo spazio vettoriale delle applicazioni $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$, limitate, tali che $x \to \mathrm{E}^{x,s}(\Phi)$ sia misurabile e

$$\mathrm{E}^{\mu,s}(\Phi) = \int_E \mathrm{E}^{x,s}(\Phi)\, \mu(dx).$$

$\mathscr{H}$ soddisfa immediatamente la condizione i) del Teorema 0.11, per il Teorema di Beppo Levi. Esso contiene inoltre le indicatrici degli eventi Γ della forma $\{X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n\}$, grazie alla (5.4). Dunque contiene tutte le v.a. limitate e misurabili rispetto alla σ-algebra generata dalle v.a. $X_t, t \ge s$ e in particolare le funzioni indicatrici degli eventi di $\mathscr{G}_\infty^s$.

S5.2 La verifica immediata: se $s \le t$, poiché $\mathscr{F}_s \supset \mathscr{G}_s$ si ha q.c.

$$\mathrm{P}(X_t \in A \mid \mathscr{G}_s) = \mathrm{E}(1_{\{X_t\in A\}} \mid \mathscr{G}_s) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(1_{\{X_t\in A\}} \mid \mathscr{F}_s) \mid \mathscr{G}_s] = \\ \mathrm{E}[p(s,t,X_s,A) \mid \mathscr{G}_s] = p(s,t,X_s,A)$$

poiché la v.a. $p(s,t,X_s,A)$ è già $\mathscr{G}_s$-misurabile.

S5.3 a) È chiaro che q soddisfa alle condizioni i) e ii) della Definizione 5.1. Con le notazioni del suggerimento, la relazione $(Q_{s,u} f) \circ \Phi = P_{s,u}(f\circ\Phi)$ è immediata se $f = 1_A, A \in \mathscr{G}$. In questo caso infatti, se $s \le t$, per la (5.34) e ricordando che $1_A \circ \Phi = 1_{\Phi^{-1}(A)}$,

$$P_{s,t}(f\circ\Phi)(x) = p(s,t,x,\Phi^{-1}(A)) = q(s,t,\Phi(x),A) = (Q_{s,t} f)\circ\Phi(x).$$

Si estende poi questa relazione a tutte le funzioni $f : G \to \mathbb{R}$ misurabili limitate con il solito Teorema 0.11. L'equazione di Chapman-Kolmogorov è ora immediata: per ogni funzione $f : G \to \mathbb{R}$ misurabile limitata si ha

$$Q_{s,u}(Q_{u,t} f)\circ\Phi = P_{s,u}((Q_{u,t} f)\circ\Phi) = P_{s,u}(P_{u,t}(f\circ\Phi)) = P_{s,t}(f\circ\Phi) = (Q_{s,t} f)\circ\Phi$$

da cui si ricava la relazione $Q_{s,u}(Q_{u,t} f) = Q_{s,t} f$ perché Φ è surgettiva. Resta da verificare che per il processo Y vale la proprietà di Markov. Per ogni $A \in \mathscr{G}$ e $s \le t$ si ha

$$\mathrm{P}(Y_t \in A \mid \mathscr{F}_s) = \mathrm{P}(X_t \in \Phi^{-1}(A) \mid \mathscr{F}_s) = p(s,t,X_s,\Phi^{-1}(A)) = q(s,t,Y_s,A).$$

b) Occorre mostrare che sono soddisfatte le condizioni di a) quando X è un moto browniano e $\Phi(x) = |x - z|$. Ciò è abbastanza intuitivo per le proprietà d'invarianza per rotazione della funzione di transizione del moto browniano (vedi la Figura 12.3). Le considerazioni che seguono cercano di rendere in forma rigorosa questa intuizione.

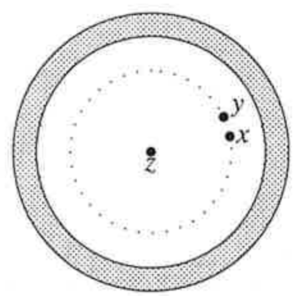

Figura 12.3 Per motivi d'invarianza per rotazione, la probabilità di passare nella zona ombreggiata è la stessa partendo da x oppure da y, o comunque da qualunque punto che si trovi sulla stessa sfera di centro z.

Usando la (5.35), che è immediata perché $p(s,x,dy)$ è una legge gaussiana di media x e varianza s, si tratta di mostrare che, se $|x-z| = |y-z|$ allora

$$P(\sqrt{s}Z \in A - x) = P(\sqrt{s}Z \in A - y)$$

per ogni A della forma $A = \Phi^{-1}(A')$, $A' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$. Un tale sottoinsieme di $\mathbb{R}^m$ è una specie di corona circolare attorno a z (lo sarebbe in senso stretto se A fosse un intervallo). In ogni modo l'insieme $A - z$ è chiaramente invariante per rotazione. Inoltre esiste una matrice ortogonale O tale che $O(x-z) = y - z$. Dunque, poiché le v.a. $N(0, I)$ sono invarianti per rotazione,

$$\begin{aligned} P(\sqrt{s}Z \in A - x) &= P(\sqrt{s}Z \in A - z - (x - z)) = \\ &= P(\sqrt{s}Z \in O(A - z - (x - z))) = P(\sqrt{s}Z \in A - z - (y - z)) = P(\sqrt{s}Z \in A - y). \end{aligned}$$

S5.4 a) Come nell'Esercizio 3.6 b), si ha, per $s \le t$,

$$C_{t,s} = K_{s,t}K_{s,s}^{-1}, \quad Y_{t,s} = X_t - K_{s,t}K_{s,s}^{-1}X_s.$$

$Y_{t,s}$ è dunque una v.a. gaussiana centrata di matrice di covarianza $K_{t,t} - K_{s,t}K_{s,s}^{-1}K_{s,t}$. Inoltre, per Lemma 3.9, per ogni funzione f misurabile limitata

$$E[f(X_t) \mid X_s] = E[f(C_{t,s}X_s + Y_{t,s}) \mid X_s] = \Phi_f(X_s)$$

dove $\Phi_f(x) = E[f(C_{t,s}x + Y_{t,s})]$. Dunque la legge condizionale di X_t dato $X_s = x$ è gaussiana di media $C_{t,s}x$ e matrice di covarianza $K_{t,t} - K_{s,t}K_{s,s}^{-1}K_{s,t}$.

b) Mostriamo che la (5.36) è equivalente all'indipendenza di $Y_{t,s}$ e della σ-algebra $\sigma(X_u, u \le s)$. Infatti $Y_{t,s} = X_t - K_{s,t}K_{s,s}^{-1}X_s$ e le covarianze tra $Y_{t,s}$ e X_u sono date dalla matrice (ricordiamo che tutte queste v.a. sono centrate)

$$E(Y_{s,t}X_u^*) = E(X_tX_u^*) - E(K_{s,t}K_{s,s}^{-1}X_sX_u^*) = K_{u,t} - K_{s,t}K_{s,s}^{-1}K_{s,u}$$

che si annulla se solo se vale la (5.36). Se questo è il caso, allora vale la proprietà di Markov rispetto alla filtrazione naturale: infatti per ogni funzione f misurabile limitata e per $s \le t$ si ha, sempre usando il Lemma 3.9,

$$E[f(X_t) \mid \mathcal{G}_s] = E[f(C_{t,s}X_s + Y_{t,s}) \mid \mathcal{G}_s] = \Phi_f(X_s)$$

sempre con $\Phi_f(x) = E[f(C_{t,s}x + Y_{t,s})]$. Questa relazione implica che il processo è di Markov, di funzione di transizione

$$p(s,t,x,A) = P(C_{t,s}x + Y_{t,s} \in A).$$

Viceversa, supponiamo che il processo sia di Markov rispetto alla filtrazione naturale. Per $s \le t$ si ha $E(X_t \mid X_s) = C_{t,s}X_s$. Perché si abbia $E(X_t \mid X_s) = E(X_t \mid \mathcal{G}_s)$, dovrà essere, in particolare,

$$E(X_tX_u^*) = E[E(X_t\mathcal{G}_s)X_u^*) = E(C_{t,s}X_sX_u^*)$$

Cioè la (5.36).

S5.5 Siano $B_R(x)$ una palla di centro x e raggio R contenuta in D, τ_R e τ i tempi d'uscita da $B_R(x)$ e da D rispettivamente (attenzione a non confondersi, nel paragrafo 5.3 si parlava di tempi d'ingresso, qui di tempi d'uscita). La (5.23) dà

$$u(x) = E^x[\underbrace{E^{X_{\tau_R}}[f(X_\tau)]}_{=u(X_{\tau_R})}] = \int_{\partial B_R(x)} u(y)\,d\nu(y)$$

dove ν è la legge di X_{τ_R}. Per l'Esercizio 2.9 ν è la misura di Lebesgue normalizzata della superficie sferica $\partial B_R(x)$. Dunque u coincide con la sua media su $\partial B_R(x)$ per ogni R abbastanza piccolo e, come annunciato, ciò implica che u è armonica.

S5.6 Per la Definizione 5.21 c) si ha, per ogni x, s,

$$\begin{aligned} E^{x,s}(H^f_{x,s}(t)) &= E^{x,s}\Big(f(X_t) - f(x) - \int_s^t L_u f(X_u)\,du\Big) = \\ &= T_{s,t}f(x) - f(x) - \int_s^t T_{s,u}L_u f(X_u)\,du = 0. \end{aligned} \tag{12.12}$$

Si ha poi

$$\begin{aligned} &E^{x,s}(H^f_{x,s}(t) \mid \mathcal{F}^s_v) = \\ &= \underbrace{f(X_v) - f(x) - \int_s^v L_u f(X_u)\,du}_{=H^f_{x,s}(v)} + E^{x,s}\Big(f(X_t) - f(X_v) - \int_v^t L_u f(X_u)\,du \,\Big|\, \mathcal{F}^s_v\Big) = \end{aligned}$$

poiché le v.a. $f(X_v)$ e $\int_s^v L_u f(X_u)\,du$ sono $\mathcal{F}^s_v$-misurabili. Resta da dimostrare che la speranza condizionale nell'ultimo termine è uguale a 0. Poiché la v.a. tra parentesi è $\mathcal{G}^v_\infty$-misurabile, per la Proposizione 5.6,

$$\begin{aligned} &E^{x,s}\Big(f(X_t) - f(X_v) - \int_v^t L_u f(X_u)\,du \,\Big|\, \mathcal{F}^s_v\Big) = \\ &= E^{X_v,v}\Big(f(X_t) - f(X_v) + \int_v^t L_u f(X_u)\,du\Big) = \\ &= T_{v,t}f(X_v) - f(X_v) - \int_v^t T_{v,u}L_u f(X_u)\,du \end{aligned}$$

e l'ultimo membro è uguale a 0 per la (12.12)

S5.7 a) Se un vettore $v \in \mathbb{R}^m$ è in modulo $\geq r$, allora necessariamente una almeno delle sue componenti deve essere più grande in modulo di $rm^{-1/2}$. Dunque

$$\mathrm{P}(|B_t| \geq r) \leq \mathrm{P}\big(|B_i(t)| \geq rm^{-1/2} \text{per almeno un indice } i, 1 \leq i \leq m\big) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^m \mathrm{P}(|B_i(t)| \geq rm^{-1/2}) = m\,\mathrm{P}(|B_1(t)| \geq rm^{-1/2}) \leq 2m\,\mathrm{P}(B_1(t) \geq rm^{-1/2}).$$

b) Applichiamo la Proposizione 5.20. Intanto, usando b) e una delle maggiorazioni del Lemma 2.14,

$$p(h, x, B_R(x)^c) = \mathrm{P}(|B_h| \geq r) \leq 2m\,\mathrm{P}(B_1(h) \geq rm^{-1/2}) =$$
$$= 2m\,\mathrm{P}\big(B_1(1) \geq rm^{-1/2}h^{-1/2}\big) \leq \frac{2m^{3/2}h^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{r^2}{2mh}\Big).$$

Si ha quindi subito la (5.27). Inoltre

$$\frac{1}{h}\int_{|y-x|\leq R} (y_i - x_i)\, p(h, x, dy) = \frac{1}{h}\int_{|y-x|\leq R} \frac{y_i - x_i}{(2\pi h)^{m/2}} \exp\Big(-\frac{|y-x|^2}{2h}\Big)\, dy =$$
$$= \frac{1}{h}\int_{|z|\leq R} \frac{z_i}{(2\pi h)^{m/2}}\, \mathrm{e}^{-|z|^2/2h}\, dz = 0$$

poiché si integra una funzione dispari su un insieme simmetrico. Inoltre

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_{|y-x|\leq R} (y_i - x_i)(y_j - x_j)\, p(h, x, dy) =$$
$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_{|y-x|\leq R} \frac{(y_i - x_i)(y_j - x_j)}{(2\pi h)^{m/2}} \exp\Big(-\frac{|y-x|^2}{2h}\Big)\, dy =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}) \int_{|z|\leq R/\sqrt{h}} z_i z_j \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|z|^2}\, dz \overset{h\to 0}{\to} \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} z_i z_j \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|z|^2}\, dz = \delta_{ij}$$

poiché riconosciamo che l'ultimo integrale non è altro che la matrice di covarianza di una v.a. $N(0, I)$. Riprendendo le notazioni della Proposizione 5.20, si ha $b_i = 0$, $a_{ij} = \delta_{ij}$. Dunque il moto browniano ha generatore dato da

$$Lf = \tfrac{1}{2}\triangle f$$

per ogni funzione $f \in C^2 \cap C_b$.

S5.8 a) Per ogni scelta di $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq 1$ la legge di $(\mathring{B}_{t_1}, \ldots, \mathring{B}_{t_n})$ è gaussiana, dato che si tratta di una funzione lineare di $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}, B_1)$. Dunque $(\mathring{B}_t)_{t\leq 1}$ è un processo gaussiano. $\mathring{B}_t$ ha media 0. Inoltre, se $s \leq t$,

$$K_{s,t} = \mathrm{Cov}(\mathring{B}_t, \mathring{B}_s) = \mathrm{E}(\mathring{B}_t \mathring{B}_s) =$$
$$= \mathrm{E}(B_t B_s) + st\mathrm{E}(B_1^2) - s\mathrm{E}(B_t B_1) - t\mathrm{E}(B_s B_1) = s - st = s(1-t).$$

$\mathring{B}_t$ ha dunque varianza $\sigma_t^2 = t(1-t)$. Il processo $(\mathring{B}_t)_{t\leq 1}$ è indipendente da B_1 perché, per $t \leq 1$,

$$\mathrm{Cov}(\mathring{B}_t, B_1) = \mathrm{E}(B_t B_1) - t\mathrm{E}(B_1^2) = t - t = 0.$$

B_1 è quindi indipendente da ognuna delle v.a. $\mathring{B}_t$, $t \leq 1$ e dunque anche da $\sigma(\mathring{B}_t, t \leq 1)$ per l'Esercizio 2.1 c).

Riprendendo l'Esercizio 5.4 a), la legge condizionale di $\mathring{B}_t$ dato $\mathring{B}_s = x$ è gaussiana di media

$$\frac{\mathrm{Cov}(\mathring{B}_t, \mathring{B}_s)}{\mathrm{Var}(\mathring{B}_s)}\, x = \frac{1-t}{1-s}\, x \tag{12.13}$$

e varianza

$$\mathrm{Var}(\mathring{B}_t) - \frac{\mathrm{Cov}(\mathring{B}_t, \mathring{B}_s)^2}{\mathrm{Var}(\mathring{B}_s)} = t(1-t) - \frac{s(1-t)^2}{1-s} = \frac{1-t}{1-s}\,(t-s). \tag{12.14}$$

b) Riprendendo le notazioni dell'Esercizio 5.4, se $u \leq s \leq t$, $K_{t,u} = u(1-t)$, mentre

$$K_{t,s} K_{s,s}^{-1} K_{s,u} = s(1-t)\, \frac{1}{s(1-s)}\, u(1-s) = u(1-t).$$

Dunque la (5.36) è soddisfatta e $(\mathring{B}_t)_t$ è un processo di Markov.

c1) Per $|z| \geq R/\sqrt{h}$ si ha $\mathrm{e}^{-z^2/2K} = \mathrm{e}^{-z^2/4K}\mathrm{e}^{-z^2/4K} \leq \mathrm{e}^{-z^2/4K}\mathrm{e}^{-R^2/4Kh}$. Dunque

$$\frac{1}{h^\alpha}\int_{|z|\geq R/\sqrt{h}} |z|^M \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2K}}\, dz \leq \frac{1}{h^\alpha}\, \mathrm{e}^{-\frac{R^2}{4Kh}} \underbrace{\int |z|^M \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4K}}\, dz}_{<+\infty} \overset{h\to 0}{\to} 0.$$

c2) Sappiamo, per le (12.13) e (12.14), che $p(s, s+h, x, \cdot)$ è una legge $N(x_h, \sigma_h^2)$, con

$$x_h = \Big(1 - \frac{h}{1-s}\Big)x, \qquad \sigma_h^2 = h\Big(1 - \frac{h}{1-s}\Big).$$

Dunque, con il cambio di variabile $z = (y - x)/\sigma_h$,

$$\frac{1}{h}\int_{|y-x|\geq R} |y-x|^M\, p(s, s+h, x, dy) =$$
$$= \frac{1}{h}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_h}\int_{|y-x|\geq R} |y-x|^M \exp\Big[-\frac{1}{2\sigma_h^2}(y - x_h)^2\Big]\, dy =$$
$$= \frac{\sigma_h^M}{h}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|z|\geq R/\sigma_h} |z|^M \exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(z + \frac{xh}{\sigma_h(1-s)}\Big)^2\Big]\, dz.$$

Ma, se $|z| \ge R/\sigma_h$, per h abbastanza piccolo si ha

$$\Big|z + \frac{xh}{\sigma_h(1-s)}\Big| \ge \frac{|z|}{2}$$

(ricordiamo che $\sigma_h \sim \sqrt{h}$) e dunque

$$\frac{1}{h}\int_{|y-x|\ge R} |y-x|^M\, p(s, s+h, x, dy) \le \frac{\sigma_h^M}{h}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|z|\ge R/\sigma_h} |z|^M \mathrm{e}^{-z^2/8}\, dy$$

e si conclude usando il punto c1).

c3) Usiamo la Proposizione 5.20. La (5.27) segue da c2) con $M = 0$. Inoltre, sempre grazie a c2), poiché $p(s, s+h, x, \cdot)$ ha media x_h,

$$\frac{1}{h}\int_{|y-x|\le R}(y-x)\, p(s, s+h, x, dy) = \frac{1}{h}\int (y-x)\, p(s, s+h, x, dy) + o(1) =$$

$$= \frac{1}{h}\Big(\int y\, p(s, s+h, x, dy) - x\Big) + o(1) = \frac{1}{h}(x_h - x) + o(1) = -\frac{x}{1-s} + o(1).$$

Allo stesso modo

$$\frac{1}{h}\int_{|y-x|\le R}(y-x)^2\, p(s, s+h, x, dy) = \frac{1}{h}\int (y-x)^2\, p(s, s+h, x, dy) + o(1).$$

Sviluppiamo $(y-x)^2 = \big((y-x_h) + (x_h - x)\big)^2$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int (y-x)^2\, p(s, s+h, x, dy) &= \frac{1}{h}\int (y-x_h)^2\, p(s, s+h, x, dy) +\\ &+ \frac{2}{h}\int (y-x_h)(x_h-x)\, p(s, s+h, x, dy) +\\ &+ \frac{1}{h}(x-x_h)^2\int p(s, s+h, x, dy).\end{aligned}$$

Nel primo integrale a destra riconosciamo la varianza di $p(s, t, x, \cdot)$, cioè σ_h^2; il secondo è nullo (il termine $(x - x_h)$ esce dall'integrale). In conclusione

$$\frac{1}{h}\int_{|y-x|\ge R}(y-x)^2\, p(s, s+h, x, dy) = \frac{1}{h}\Big(\sigma_h^2 + \frac{h^2x^2}{(1-s)^2}\Big) + o(1)$$

e dunque

$$\frac{1}{h}\int_{|y-x|\ge R}(y-x)^2\, p(s, s+h, x, dy) \ \overset{h\to 0}{\to}\ 1.$$

Per la Proposizione 5.20 dunque, per $t < 1$, il ponte browniano ha generatore dato da

$$L_t f = \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x) - \frac{x}{1-t}\frac{df}{dx}(x). \tag{12.15}$$

per ogni funzione $f \in C^2 \cap C_b$.

S5.9 a) Se $s = \frac{t}{1-t}$, allora $t = \frac{s}{s+1}$ e $1 - t = \frac{1}{s+1}$. La (5.37) vale dunque se e solo se il processo $B_s = (1+s)X_{\frac{s}{s+1}}$. è un moto browniano. Dato che si tratta ovviamente di un processo gaussiano centrato che si annulla per $s = 0$, resta da provare che $\mathrm{E}(B_s B_t) = s \wedge t$. Se $s \le t$, allora si ha anche $\frac{s}{s+1} \le \frac{t}{t+1}$ e, ricordando la forma della funzione di covarianza del ponte browniano,

$$\mathrm{E}(B_s B_t) = (1+s)(1+t)\mathrm{E}\big(X_{\frac{s}{s+1}} X_{\frac{t}{t+1}}\big) = (1+s)(1+t)\frac{s}{s+1}\Big(1 - \frac{t}{t+1}\Big) = s$$

e dunque B è un moto browniano.

b) Si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\Big(\sup_{0\le t\le 1} X_t > a\Big) &= \mathrm{P}\Big(\sup_{0\le t<1}(1-t)B_{\frac{t}{t+1}} > a\Big) = \mathrm{P}\Big(\sup_{s>0}\frac{1}{s+1}B_s > a\Big) =\\ &= \mathrm{P}\Big(\sup_{s>0}\frac{1}{s+1}(B_s - (s+1)a) > 0\Big) = \mathrm{P}\Big(\sup_{s>0} B_s - sa > a\Big).\end{aligned}$$

Nell'Esercizio 4.7 abbiamo visto che la v.a $\sup_{s>0} B_s - sa$ ha legge esponenziale di parametro $2a$. Dunque

$$\mathrm{P}\Big(\sup_{0\le t\le 1} X_t > a\Big) = \mathrm{e}^{-2a^2}$$

e la funzione di ripartizione della v.a. $\sup_{0\le t\le 1} X_t$ è $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-2x^2}$ per $x > 0$. Derivando, la densità vale $f(x) = 4x\mathrm{e}^{-2x^2}$, sempre per $x \ge 0$.

S5.10 Si calcola subito, per $s \le t \le 1$,

$$K_{s,t} = \mathrm{E}(X_s X_t) = \mathrm{E}(B_{1-s}B_{1-t}) = \min(1-s, 1-t) = 1-t$$

ed è immediato verificare che la (5.36) è soddisfatta. Dunque $(X_t)_t$ è di Markov rispetto alla sua filtrazione naturale. La funzione di transizione $p(s, t, x, \cdot)$ è gaussiana di media e varianza date rispettivamente dalle (12.7) e (12.8), ovvero di media

$$K_{s,t}K_{s,s}^{-1}x = \frac{1-t}{1-s}\,x$$

e varianza

$$K_{t,t} - K_{s,t}K_{s,s}^{-1}K_{t,s} = (1-t) - \frac{(1-t)^2}{1-s} = \frac{1-t}{1-s}(t-s).$$

Si tratta della stessa funzione di transizione del ponte browniano (vedi l'Esercizio 5.8). Dunque questo processo di Markov ha anche lo stesso generatore, dato dalla (12.15). La legge iniziale naturalmente è quella di B_1, cioè $N(0,1)$.

S5.11 a) Si ha

$$\{B_t \le at \text{ per ogni } t \le T\} = \Big\{\frac{B_t}{\big(2t\log\log\frac{1}{t}\big)^{1/2}} \le a\Big(\frac{t}{2\log\log\frac{1}{t}}\Big)^{1/2} \text{ per ogni } t \le T\Big\}.$$

Ora, per la legge del logaritmo iterato, con probabilità 1

$$\overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{B_t}{\big(2t\log\log\frac{1}{t}\big)^{1/2}} = 1$$

mentre

$$\lim_{t\to 0+} a\Big(\frac{t}{2\log\log\frac{1}{t}}\Big)^{1/2} = 0$$

e dunque l'evento in questione ha probabilità 0.

b1) In maniera analoga

$$\{B_t \le a\sqrt{t} \text{ per ogni } t \le \varepsilon\} = \Big\{\frac{B_t}{\big(2t\log\log\frac{1}{t}\big)^{1/2}} \le \frac{a}{\big(2\log\log\frac{1}{t}\big)^{1/2}} \text{ per ogni } t \le \varepsilon\Big\} \supset$$
$$\supset \Big\{\sup_{t\le\varepsilon} \frac{B_t}{\big(2t\log\log\frac{1}{t}\big)^{1/2}} \le \frac{a}{\big(2\log\log\frac{1}{\varepsilon}\big)^{1/2}}\Big\}.$$

Per la legge del logaritmo iterato le v.a.

$$Z_\varepsilon \overset{def}{=} \sup_{t\le\varepsilon} \frac{B_t}{\big(2t\log\log\frac{1}{t}\big)^{1/2}}$$

sono finite e decrescenti in ε, mentre

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{a}{\big(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\big)^{1/2}} = +\infty$$

Dunque, per ε piccolo, $Z_\varepsilon \le Z_1$ e

$$\mathrm{P}(B_t \le a\sqrt{t} \text{ per ogni } t \le \varepsilon) \ge \mathrm{P}\Big(Z_1 \le \frac{a}{\big(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\big)^{1/2}}\Big) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 1$$

che conclude la prova di b1).

b2) Poiché ϕ è crescente e $\phi(0) = b > 0$, per il principio di riflessione,

$$\mathrm{P}(B_t \le \phi(t) \text{ per ogni } t \le T) \ge \mathrm{P}\Big(\sup_{t\le T} B_t \le b\Big) > 0$$

b3) Poniamo $\tau = \inf\{t;\, B_t \ge a\sqrt{t}\}$. Grazie a b1) sappiamo che $\mathrm{P}(\tau > \varepsilon) > 0$ per ε abbastanza piccolo e dobbiamo mostrare che $\mathrm{P}(\tau > T) > 0$ per ogni T. Indichiamo con $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_t, (X_t)_t, (\mathrm{P}^x)_x)$ la realizzazione canonica di un moto browniano e poniamo $\tau_\varepsilon = \inf\{t;\, B_t \ge \sqrt{t+\varepsilon}\}$. Allora $\{\tau > T\} = \{\tau > \varepsilon\} \cap \{\tau_\varepsilon \circ \theta_\varepsilon > T - \varepsilon\}$. Infatti la condizione $\tau > \varepsilon$ garantisce che la traiettoria non supera il la funzione $t \to \sqrt{t}$ prima del tempo ε, mentre la condizione $\tau_\varepsilon \circ \theta_\varepsilon > T - \varepsilon$ garantisce che non lo supera neanche nell'intervallo di tempo $[\varepsilon, T]$. Poiché $\{\tau > \varepsilon\} \in \mathscr{F}_\varepsilon$, la proprietà di Markov dà

$$\begin{aligned}(12.16)\qquad \mathrm{P}^0(\tau > T) &= \mathrm{E}^0[\mathrm{E}^0(1_{\{\tau>T\}} \mid \mathscr{F}_\varepsilon)] = \\ &= \mathrm{E}^0[1_{\{\tau>\varepsilon\}}\mathrm{E}^0(1_{\{\tau_\varepsilon>T-\varepsilon\}} \circ \theta_\varepsilon \mid \mathscr{F}_\varepsilon)] = \mathrm{E}^0[1_{\{\tau>\varepsilon\}}\mathrm{E}^{X_\varepsilon}(1_{\{\tau_\varepsilon>T-\varepsilon\}})]\end{aligned}$$

Dunque la quantità $\mathrm{P}^0(\tau > T)$ appare come la speranza matematica della v.a. $\mathrm{P}^{X_\varepsilon}(\tau_\varepsilon > T - \varepsilon)$, calcolata sull'evento $\{\tau > \varepsilon\}$. Sappiamo già che $\mathrm{P}^0(\tau > \varepsilon) > 0$. Basterà quindi provare che la v.a. $\mathrm{P}^{X_\varepsilon}(\tau_\varepsilon > T - \varepsilon)$ è > 0 su $\{\tau > \varepsilon\}$. Ma su $\{\tau > \varepsilon\}$ si ha $X_\varepsilon < a\sqrt{\varepsilon}$; inoltre, se $x \le a\sqrt{\varepsilon}$, per l'invarianza per traslazione delle leggi del moto browniano,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}^x(\tau_\varepsilon > T - \varepsilon) &= \mathrm{P}^x(X_t \le a\sqrt{t+\varepsilon} \text{ per ogni } t \le T - \varepsilon) = \\ &= \mathrm{P}^0(X_t \le a\sqrt{t+\varepsilon} - x \text{ per ogni } t \le T - \varepsilon) > 0.\end{aligned}$$

dove l'ultima minorazione è conseguenza di b2) (la funzione $\phi(t) = a\sqrt{t+\varepsilon} - x$ è non decrescente e tale che $\phi(0) > 0$).

c) L'evento $\{B_t \le a\sqrt{t},$ per ogni $t \ge 0\}$ ha probabilità 0 perché per la legge del logaritmo iterato (per $t \to +\infty$!)

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{B_t}{\big(2t\log\log t\big)^{1/2}} = 1$$

mentre

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{a\sqrt{t}}{\big(2t\log\log t\big)^{1/2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{a}{\big(2\log\log t\big)^{1/2}} = 0$$

S5.12 a) Per provare l'esistenza di una versione continua si usa il Teorema 1.5, di Kolmogorov. Ricordando la (5.4), che dà la legge congiunta di (X_s, X_t), si ha, indicando con μ la legge iniziale del processo,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[|X_t - X_s|^\beta] &= \int \mu(dz)\, p(u,s,z,dx) \int |x-y|^\beta\, p(s,t,x,dy) \le \\ &\le c\,|t-s|^{1+\varepsilon} \int \mu(dz)\, p(u,s,z,dx) = c|t-s|^{1+\varepsilon}.\end{aligned}$$

Per il Teorema 1.5, X ha una versione continua (anzi con traiettorie hölderiane di esponente γ per ogni $\gamma \le \frac{\varepsilon}{\beta}$). Inoltre la condizione (5.26) è subito verificata, poiché

$$\frac{1}{h}\,p(s,s+h,x,B_R(x)^c)=\frac{1}{h}\int_{B_R(x)^c}p(s,s+h,x,dy)\le$$
$$\le\frac{R^{-\beta}}{h}\int|y-x|^\beta p(s,s+h,x,dy)\le cR^{-\beta}|h|^\varepsilon .$$

S5.13 a) Basta verificare che coincidono, rispetto a $t_x(\mathrm{P}^0)$ e P^x, le speranze matematiche delle v.a. della forma $f_1(X_{t_1})\dots f_n(X_{t_n})$, per ogni scelta di tempi $t_1,\dots,t_n$ e di funzioni misurabili limitate $f_1,\dots,f_n$. Ciò accade perché la funzione di transizione $p(t,x,dy)$ (vedi l'Esempio 5.3) ha una densità che dipende solo da $y-x$. È una cosa più facile da pensare che da dire. In dettaglio, con i cambi di variabile $z_i=y_i+x$,

$$\mathrm{E}^0[f_1(X_{t_1}+x)\dots f_n(X_{t_n}+x)]=$$
$$=\int f(y_1+x)p(t_1,0,dy_1)\int\dots\int f(y_n+x)p(t_n-t_{n-1},y_{n-1},dy_n)=$$
$$=\int f(y_1+x)(2\pi t_1)^{-m/2}\exp\Big(-\frac{|y_1|^2}{2t_1}\Big)\,dy_1\int\dots$$
$$\dots\int f(y_n+x)\big(2\pi(t_n-t_{n-1})\big)^{-m/2}\exp\Big(-\frac{|y_n-y_{n-1}|^2}{2(t_n-t_{n-1})}\Big)\,dy_n=$$
$$=\int f(z_1)(2\pi t_1)^{-m/2}\exp\Big(-\frac{|z_1-x|^2}{2t_1}\Big)\,dy_1\int\dots$$
$$\dots\int f(z_n)\big(2\pi(t_n-t_{n-1})\big)^{-m/2}\exp\Big(-\frac{|z_n-z_{n-1}|^2}{2(t_n-t_{n-1})}\Big)\,dy_n=$$
$$=\int f(z_1)p(t_1,x,dz_1)\int\dots\int f(z_n)p(t_n-t_{n-1},z_{n-1},dz_n)=$$
$$=\mathrm{E}^x[f_1(X_{t_1})\dots f_n(X_{t_n})].$$

b) Se $f\in C_K^2$, allora

$$Lf(x)=\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\big(T_hf(x)-f(x)\big)=\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\big(\mathrm{E}^x[f(X_h)]-f(x)\big).$$

Poiché supponiamo $t_x(\mathrm{P}^0)=\mathrm{P}^x$, allora $\mathrm{E}^x[f(X_h)]=\mathrm{E}^0[f(X_h+x)]=T_h(t_xf)(0)$, dove con t_xf indichiamo la funzione "traslata" $y\to f(x+y)$. Dunque l'operatore differenziale L gode della proprietà (invarianza per traslazione) $Lf(x)=L(t_xf)(0)$. Poiché è immediato verificare che

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}(x)=\frac{\partial(t_xf)}{\partial y_i}(0),\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2}(x)=\frac{\partial^2(t_xf)}{\partial y_i^2}(0)$$

uguagliando le due espressioni

$$Lf(x)=\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)+\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$
$$L(t_xf)(0)=\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)+\sum_{i=1}^n b_i(0)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

che devono essere uguali per ogni scelta della funzione $f\in C_K^2$, si ricava facilmente che deve essere $a_{ij}(x)=a_{ij}(0)$, $b_i(x)=b_i(0)$, per ogni $i,j\le m$.

S5.14 a) Si ha

$$p^h(t,x,E)=\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{h(x)}\int_E h(y)\,p(t,x,dy)=\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{h(x)}T_th(x)=1.$$

Resta da verificare l'equazione di Chapman-Kolmogorov. Si ha

$$\int_E p^h(s,y,A)\,p^h(t,x,dy)=$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{h(x)}\int_E h(y)p(t,x,dy)\,\frac{\mathrm{e}^{-\alpha s}}{h(y)}\int_A h(z)\,p(s,y,dz)=$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{-\alpha(t+s)}}{h(x)}\int_A h(z)\,p(t+s,x,dz)=p^h(s+t,x,A)$$

(abbiamo usato l'equazione di Chapman-Kolmogorov per p).

b) Si ha evidentemente

$$T_t^hg(x)=\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{h(x)}T_t(hg)(x).$$

Dunque, se $gh=f\in\mathcal{D}(L)$,

$$L^hg(x)=\lim_{t\to0+}\frac{1}{t}[T_t^hg(x)-g(x)]=\frac{1}{h(x)}\lim_{t\to0+}\frac{1}{t}[\mathrm{e}^{-\alpha t}T_tf(x)-f(x)]=$$
$$=\frac{1}{h(x)}\lim_{t\to0+}\frac{1}{t}(T_tf(x)-f(x))+\frac{1}{t}(\mathrm{e}^{-\alpha t}-1)T_tf(x)=\frac{1}{h(x)}\,(Lf(x)-\alpha f(x))=$$
$$=\frac{1}{h(x)}\,L(gh)(x)-\alpha g(x).$$

c) Se L è come nella (5.39), allora si calcola facilmente

$$L(gh)=h\,Lg+g\,Lh+\sum_{i,j=1}^m a_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Poiché derivando in $t = 0$ nella (5.38) si ha $Lh = \alpha h$,

$$L^h = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

dove

$$\tilde{b}_i(x) = b(x) + \frac{1}{h(x)}\sum_{j=1}^m a_{ij}(x)\frac{\partial h}{\partial x_j}.$$

d) Verifichiamo che $h(x) = \mathrm{e}^{\langle v,x\rangle}$ soddisfa a (5.38). Si ha

$$T_t h(x) = \int h(y)\,p(t,x,dy) = (2\pi t)^{-m/2}\int \mathrm{e}^{\langle v,y\rangle}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2t}|x-y|^2}\,dy.$$

Si riconosce facilmente nell'integrale la trasformata di Laplace di una legge $N(x, tI)$ calcolata in v. Si ha dunque (vedi l'Esercizio 0.10)

$$T_t h(x) = \mathrm{e}^{\langle v,x\rangle}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t|v|^2}.$$

La (5.38) è dunque verificata per $\alpha = \frac{1}{2}|v|^2$. Per b), dunque,

$$L^h = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^m v_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

S5.15 a) La prima relazione è abbastanza intuitiva: $1_{\{\tau>t-s\}}\circ\theta_s$ è l'indicatrice dell'evento costituito dalle traiettorie che restano all'interno di D nell'intervallo di tempo $]s,t]$, $1_{\{\tau>s\}}$ è l'indicatrice dell'evento costituito dalle traiettorie che restano all'interno di D nell'intervallo di tempo $[0,s]$. Il loro prodotto è l'indicatrice dell'evento costituito dalle traiettorie che restano in D nell'intervallo $[0,t]$, ovvero di $\{\tau > t\}$. Inoltre, poiché $\{\tau > s\} \in \mathcal{F}_s$ e per la (5.15),

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^x[f(X_t)1_{\{\tau>t\}}\mid\mathcal{F}_s] &= \mathrm{E}^x[f(X_{t-s})1_{\{\tau>t-s\}}\circ\theta_s\cdot 1_{\{\tau>s\}}\mid\mathcal{F}_s] =\\ &= 1_{\{\tau>s\}}\mathrm{E}^{X_s}[f(X_{t-s})1_{\{\tau>t-s\}}]\end{aligned}$$

b) Se $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, allora $\mathrm{P}^x(\tilde{X}_t \in A) = \mathrm{P}^x(X_t \in A, \tau > t)$. Dunque se $\tilde{X}$ fosse un processo di Markov, la sua funzione di transizione sarebbe necessariamente $\tilde{p}(t,x,A) = \mathrm{P}^x(X_t \in A, \tau > t)$. Se $f : E \to \mathbb{R}$ è misurabile limitata, allora $f(\delta) = 0$ e la relazione provata in a) si scrive

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^x[f(\tilde{X}_t)\mid\mathcal{F}_s] &= \mathrm{E}^x[f(X_t)1_{\{\tau>t\}}\mid\mathcal{F}_s] = 1_{\{\tau>s\}}\mathrm{E}^{X_s}[f(\tilde{X}_{t-s})\mid\mathcal{F}_s] =\\ &= \mathrm{E}^{\tilde{X}_s}[f(\tilde{X}_{t-s})\mid\mathcal{F}_s]\end{aligned}$$

e dunque $\tilde{X}$ è un processo di Markov. $\tilde{p}$ è necessariamente una funzione di transizione, grazie all'Osservazione p. 88.

c) Sia $Q_x = \{y; |y_i - x_i| < d_x/\sqrt{m}, i = 1,\dots,m\}$. Allora, se $y \in Q_x$, si ha $|y - x| < d_x$ e dunque $Q_x \subset D$. Se X_i, $i = 1,\dots m$, sono le componenti del moto browniano X, allora per il principio di riflessione, per ogni $a > 0$,

$$\mathrm{P}^x\Big(\sup_{s\le t} X_i(s) - x_i \ge a\Big) = \mathrm{P}^0\Big(\sup_{s\le t} X_i(s) \ge \alpha\Big) \le 2\mathrm{P}^0(X_i(t) \ge a)$$

e, poiché anche $-X_i$ è un moto browniano reale rispetto a P^0,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}^x\Big(\sup_{s\le t}|X_i(s) - x_i| \ge a\Big) &= \mathrm{P}^0\Big(\sup_{s\le t}|X_i(s)| \ge a\Big) \le\\ &\le \mathrm{P}^0\Big(\sup_{s\le t} X_i(s) \ge a\Big) + \mathrm{P}^0\Big(\inf_{s\le t} X_i(s) \le a\Big) =\\ &= 2\mathrm{P}^0\Big(\sup_{s\le t} X_i(s) \ge a\Big) = 4\mathrm{P}^0(X_i(t) \ge a) = 4\mathrm{P}^0(X_i(1) \ge a/\sqrt{t})\end{aligned}$$

Dunque, sostituendo $a = d_x/\sqrt{m}$, se τ' indica il tempo d'uscita da Q_x,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}^x(\tau \le t) \le \mathrm{P}^x(\tau' \le t) &\le \sum_{i=1}^m \mathrm{P}^0\Big(\sup_{s\le t}|X_i(s) - x_i| \ge d_x/\sqrt{m}\Big) =\\ &= 4m\mathrm{P}^0(X_i(1) \ge d_x/\sqrt{tm}) = \frac{4m}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_x/\sqrt{tm}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-z^2/2}\,dz.\end{aligned}$$

Resta da mostrare che, per ogni $f \in C_b^2(D)$, esiste il limite $\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}(\mathrm{E}^x[f(\tilde{X}_t)] - f(x))$ e calcolarlo. Ma esso è uguale a

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\big(\mathrm{E}^x[f(X_t)1_{\{\tau>t\}}] - f(x)\big) =\\ &= \lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\big(\mathrm{E}^x[f(X_t)] - f(x)\big) - \lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\mathrm{E}^x[f(X_t)1_{\{\tau\le t\}}]\end{aligned}$$

Il primo dei due limiti a destra vale $\frac{1}{2}\Delta f$ (Esercizio 5.7), mentre il secondo vale 0; infatti se $x \notin D$ si ha $\mathrm{E}^x[f(X_t)1_{\{\tau\le t\}}] = f(x) = 0$, mentre se $x \in D$

$$\mathrm{E}^x[f(X_t)1_{\{\tau\le t\}}] \le \|f\|_\infty \mathrm{P}^x(\tau \le t)$$

e basta usare la (5.40) ed il Lemma 2.14. In conclusione, se $f \in C_b^2(D)$, allora $f \in \mathcal{D}(\tilde{A})$ e $\tilde{A}f = \frac{1}{2}\Delta f$.

S5.16 a) Se f è boreliana limitata si ha

$$\int f(x)\,\mu(dx) = \int T_t f(x)\,\mu(dx) = \int \mu(dx)\int f(y)\,p(t,x,dy) =$$

e basta osservare che $\int \mu(dx)p(t,x,\cdot)$ è la legge di X_t, quando la legge iniziale è μ.

b) Conseguenza del Teorema di Fubini: se f è boreliana limitata a supporto compatto,

$$\int T_t f(x)\,dx = (2\pi t)^{-m/2}\int dx \int e^{-\frac{1}{2t}|x-y|^2} f(y)\,dy =$$
$$= \int f(y)\,dy \int (2\pi t)^{-m/2} e^{-\frac{1}{2t}|x-y|^2}\,dx = \int f(y)\,dy.$$

c) Supponiamo che la (5.41) valga per ogni x; se esistesse una probabilità invariante μ, allora si avrebbe, per ogni boreliano limitato A, $\lim_{t\to+\infty} T_t 1_A(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^m$ e quindi

$$\lim_{t\to+\infty}\int T_t 1_A(x)\,d\mu(x) = 0$$

(si può applicare il Teorema di Lebesgue perché $0 < T_t 1_A(x) < 1$). Dunque si avrebbe $\mu(A) = 0$ per ogni boreliano limitato A contro l'ipotesi che μ sia una probabilità.

d) Supponiamo f continua e limitata. Per la proprietà di Feller anche la $T_t f$ è continua e limitata e, per ogni $x \in E$,

$$\int f(y)\,\mu(dy) = \lim_{s\to+\infty} T_t f(x) = \lim_{s\to+\infty} T_{t+s} f(x) = \lim_{s\to+\infty} T_s(T_t f)(x) =$$
$$= \int T_t f(y)\,\mu(dy).$$

S6.1 Basta osservare che $B_s = \int_0^s 1_{[0,s]}(v)\,dB_v$. Dunque, per l'Osservazione successiva al Teorema 6.7,

$$E\Big(B_s \int_0^t B_u\,dB_u\Big) = \int_0^t E[1_{[0,s]}(u)B_u]\,du = 0.$$

S6.2 a) Si ha, per il Teorema 6.7,

$$E\Big[B_s^2\Big(\int_s^t B_u\,dB_u\Big)^2\Big] = E\Big[B_s^2 E\Big[\Big(\int_s^t B_u\,dB_u\Big)^2\,\Big|\,\mathcal{F}_s\Big]\Big] = E\Big[B_s^2\int_s^t B_u^2\,du\Big].$$

Ricordando che $s \le u$ e dunque $B_u - B_s$ è indipendente da B_s,

$$E(B_s^2B_u^2) = E[B_s^2(B_u - B_s + B_s)^2] = \underbrace{E[B_s^2(B_u - B_s)^2]}_{=s(u-s)} + 2\underbrace{E[B_s^3(B_u - B_s)]}_{=0} + E(B_s^4).$$

Si può scrivere $B_s = \sqrt{s}Z$ dove $Z \sim N(0,1)$ e quindi $E(B_s^4) = s^2E(Z^4)$. Il momento di ordine 4 di una v.a. $N(0,1)$ è uguale alla derivata quarta della funzione caratteristica in 0, oppure si può calcolare per parti:

$$E(Z^4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int x^4 e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(-x^3e^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + 3\int x^2e^{-x^2/2}\,dx\Big) =$$
$$= 3\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int x^2 e^{-x^2/2}\,dx}_{=\mathrm{Var}(Z)=1} = 3.$$

In conclusione $E(B_s^2B_u^2) = s(u-s) + 3s^2$; in conclusione

$$E\Big[B_s^2\Big(\int_s^t B_u\,dB_u\Big)^2\Big] = \int_s^t s(u-s) + 3s^2\,du = \frac{1}{2}s(t-s)^2 + 3s^2(t-s).$$

b) Si può scrivere $Z = \int_0^t \tilde X_u\,dB_u$, dove $\tilde X_u = X_u$ se $u \ge s$ e $\tilde X_u = 0$ se $0 \le u < s$. Poiché $B_v = \int_0^t 1_{[0,v]}(u)\,dB_u$,

$$E(ZB_v) = E\Big(\int_0^t \tilde X_u 1_{[0,v]}(u)\,du\Big) = 0 = E(Z)E(B_v).$$

Per mostrare che in generale Z non è indipendente da $\mathcal{F}_s$, cerchiamo un controesempio. Sfruttiamo il calcolo fatto in a) e poniamo $W = \int_s^t B_u\,dB_u$. Se W fosse indipendente da $\mathcal{F}_s$, in particolare W^2 e B_s^2 sarebbero non correlate e si avrebbe $E(B_s^2W^2) = E(B_s^2)E(W^2)$. Ora $E(B_s^2) = s$, mentre

$$E(W^2) = E\Big(\int_s^t B_u^2\,du\Big) = \frac{1}{2}(t^2 - s^2).$$

Confrontando con il valore di $E(B_s^2W^2)$ calcolato in a), si vede che W e B_s^2 hanno covarianza non nulla e W non può essere indipendente da $\mathcal{F}_s$.

S6.3 a) Se $f \in L^2([s,t])$ è una funzione costante a tratti, allora l'enunciato è immediato. Infatti, se $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{[t_{i-1},t_i[}$ con $s = t_1 < \ldots < t_n = t$, allora

$$\int_s^t f(u)\,dB_u = \sum_{i=1}^n \lambda_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

e tutti gli incrementi $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ sono indipendenti da $\mathcal{F}_s$. In generale, se $(f_n)_n$ è una successione di funzioni costanti a tratti (che sono dense) convergente a f in $L^2([s,t])$, allora, per le proprietà d'isometria dell'integrale stocastico,

$$B_{f_n} \overset{def}{=} \int_s^t f_n(u)\,dB_u \underset{n\to\infty}{\overset{L^2}{\to}} \int_s^t f(u)\,dB_u \overset{def}{=} B_f$$

e, passando eventualmente a una sottosuccessione, si può supporre che la convergenza abbia luogo anche q.c. Dobbiamo dimostrare che, per ogni v.a. W $\mathscr{F}_s$-misurabile limitata e per ogni funzione ψ boreliana limitata,

$$\mathrm{E}[W\psi(B_f)] = \mathrm{E}[W]\mathrm{E}[\psi(B_f)]. \tag{12.17}$$

Ma, se ψ è continua e limitata, allora $\psi(B_{f_n}) \to \psi(B_f)$ q.c. per $n \to \infty$ e si può passare al limite in entrambi i membri della relazione

$$\mathrm{E}[W\psi(B_{f_n})] = \mathrm{E}[W]\mathrm{E}[\psi(B_{f_n})].$$

La (12.17) è dunque provata per ψ continua limitata. Si passa al caso generale con il Teorema 0.12.

Alternativamente, in maniera più semplice ma fondamentalmente simile, si sarebbe potuto usare il criterio dell'Esercizio 3.11: per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{i\lambda B_f} \mid \mathscr{F}_s) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(\mathrm{e}^{i\lambda B_{f_n}} \mid \mathscr{F}_s) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(\mathrm{e}^{i\lambda B_{f_n}}) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{i\lambda B_f})$$

dove i passaggi al limite sono giustificati dal Teorema di Lebesgue.

• Osserviamo che la dimostrazione precedente sarebbe stata molto più semplice se ci fossimo accontentati di provare che B_f è indipendente da $\mathscr{G}_s = \sigma(B_v, v \le s)$. In questo caso, per il criterio dell'Esercizio 2.1 c), sarebbe bastato verificare che B_f e B_v sono non correlate per ogni $v \le s$, il che è immediato: se indichiamo con $\tilde f$ il prolungamento di f a $[0,t]$ ottenuto ponendo $f(v) = 0$ su $[0, s[$, allora

$$\mathrm{E}(B_v B_f) = \mathrm{E}\Big(\int_0^t 1_{[0,v]}\, dB_u \int_0^t \tilde f(u)\, dB_u\Big) = \int_0^t 1_{[0,v]}(u)\tilde f(u)\, du = 0.$$

b) La v.a. B_t^Φ è $\mathscr{F}_{\Phi^{-1}(t)}$-misurabile. Ciò suggerisce di provare a vedere se B^Φ sia un moto browniano rispetto a $(\tilde{\mathscr{F}}_t)_t$, con $\tilde{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_{\Phi^{-1}(t)}$. Se $s \le t$,

$$B_t^\Phi - B_s^\Phi = \int_{\Phi^{-1}(s)}^{\Phi^{-1}(t)} \sqrt{\Phi'(u)}\, dB_u$$

è indipendente da $\tilde{\mathscr{F}}_s$ per il punto a). Resta da provare il punto c) della Definizione 2.3. Ma la v.a. $B_t^\Phi - B_s^\Phi$ è gaussiana per la Proposizione 6.18, è centrata ed ha varianza

$$\mathrm{E}[(B_t^\Phi - B_s^\Phi)^2] = \int_{\Phi^{-1}(s)}^{\Phi^{-1}(t)} \Phi'(u)\, du = (t-s).$$

S6.4 Cominciamo col supporre $f = 1_{[0,s]}$; quindi $\int_0^s f(u)\, dB_u = B_s$. Se $s \ge t$. Allora, ricordando che gli incrementi del moto browniano sono indipendenti e che la legge di B_v è simmetrica per ogni $v > 0$ (e dunque ha i momenti di ordine dispari tutti uguali a 0),

$$\mathrm{E}\Big(B_s\int_0^t B_u^2\, du\Big) = \int_0^t \mathrm{E}(B_s B_u^2)\, du = \int_0^t \mathrm{E}((B_s - B_u)B_u^2)\, du + \int_0^t \mathrm{E}(B_u^3)\, du = 0.$$

Se invece $s \le t$, allora

$$\mathrm{E}\Big(B_s\int_0^t B_u^2\, du\Big) = \int_0^t \mathrm{E}(B_s B_u^2)\, du = \int_0^s \mathrm{E}(B_s B_u^2)\, du + \int_s^t \mathrm{E}(B_s B_u^2)\, du = I_1 + I_2.$$

Sappiamo già che $I_1 = 0$. Per I_2, basta calcolare

$$\mathrm{E}(B_s B_u^2) = \mathrm{E}[B_s(B_u - B_s)^2] + 2\mathrm{E}[B_s^2(B_u - B_s)] + \mathrm{E}(B_s^3) = 0.$$

In conclusione $\int_0^t B_u^2\, du$ è ortogonale a tutte le v.a. B_s, $s > 0$. Essa è dunque ortogonale a $\int_0^s f(u)\, dB_u$, quando f è una funzione di $L^2([0,s])$ costante a tratti, perché in questo caso l'integrale stocastico è una combinazione lineare delle v.a. B_s, $s > 0$. La conclusione è ora immediata per densità.

S7.1 Per la formula di Ito $d(\mathrm{e}^{-\lambda t}B_t) = -\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}B_t\, dt + \mathrm{e}^{-\lambda t}\, dB_t$ e dunque

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\, dB_s = \mathrm{e}^{-\lambda s}B_s\Big|_0^t + \lambda\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}B_s\, ds = \mathrm{e}^{-\lambda t}B_t + \lambda\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}B_s\, ds.$$

Se $t > s$ si ha

$$\mathrm{E}(|X_t - X_s|^2) = \mathrm{E}\Big[\Big(\int_s^t \mathrm{e}^{-\lambda u}\, dB_u\Big)^2\Big] = \int_s^t \mathrm{e}^{-2\lambda u}\, du = \frac{1}{2\lambda}(\mathrm{e}^{-\lambda s} - \mathrm{e}^{-\lambda t}).$$

Dunque $(X_t)_t$ è di Cauchy in L^2. Poiché X_t è gaussiana per ogni t, anche il limite Z in L^2 ha legge gaussiana (Proposizione 0.10) di media $\lim_{t\to+\infty}\mathrm{E}(X_t) = 0$ e varianza

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{E}(X_t^2) = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \mathrm{e}^{-2\lambda u}\, du = \frac{1}{2\lambda}\cdot$$

S7.2 Si ha, per $s \le t$,

$$\mathrm{E}(Y_t \mid \mathscr{F}_s) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{E}\Big(\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda u}\, dB_u \,\Big|\, \mathscr{F}_s\Big) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\int_0^s \mathrm{e}^{\lambda u}\, dB_u = \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}Y_s$$

e dunque $(Y_t)_t$ non è una martingala. Si tratta invece certamente di un processo gaussiano per la Proposizione 6.18. Y_t è dunque gaussiana, è centrata ed ha varianza

$$\sigma_t^2 = \int_0^t \mathrm{e}^{-2\lambda(t-s)}\, ds = \frac{1}{2\lambda}(1 - \mathrm{e}^{-2\lambda t}) \underset{t\to+\infty}{\to} \frac{1}{2\lambda}\cdot$$

Dunque $(Y_t)_t$ converge in legge a una v.a. $N(0, \frac{1}{2\lambda})$.

Osservazione: confrontando Y con il processo X dell'esercizio 7.1, si vede che X_t e Y_t hanno la stessa legge per ogni t. Ma i due processi sono diversi (hanno ad esempio diverse distribuzioni di dimensione finita).

Studiamo la convergenza q.c. Per il Corollario 7.8 esiste un moto browniano W tale che, posto

$$A_t = \int_0^t e^{2\lambda u}\, du = \frac{1}{2\lambda}(e^{2\lambda t} - 1),$$

allora

$$\int_0^t e^{\lambda u}\, dB_u = W_{A_t}.$$

Per la legge del logaritmo iterato,

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda u}\, dB_u &= \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, e^{-\lambda t} W_{A_t} = \\ &= \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, e^{-\lambda t}(2A_t \log\log A_t)^{1/2}\frac{W_{A_t}}{(2A_t\log\log A_t)^{1/2}} \ge \\ &\ge (1-\varepsilon)\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda t}(2A_t\log\log A_t)^{1/2} = +\infty\end{aligned}$$

e dunque $(X_t)_t$ *non* converge q.c.

S7.3 Per il Corollario 7.8, esiste un moto browniano W tale che, posto

$$A_t = \int_0^t \frac{ds}{2+\sin s},$$

si ha $X_t = W_{A_t}$. Per studiare il comportamento di A_t per $t \to +\infty$ occorre fare solo attenzione al fatto che la primitiva indicata nel suggerimento non è definita per tutti i valori di t. Conviene osservare che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{ds}{2+\sin s} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

e, poiché l'integrando è una funzione periodica, $\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}A_t = 3^{-1/2}$. Si ha dunque

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{X_t}{(2t\log\log t)^{1/2}} = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{W_{A_t}}{(2A_t\log\log A_t)^{1/2}}\,\frac{(2A_t\log\log A_t)^{1/2}}{(2t\log\log t)^{1/2}}.$$

Poiché

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{(2A_t\log\log A_t)^{1/2}}{(2t\log\log t)^{1/2}} = 3^{-1/4},$$

per la legge del logaritmo iterato si trova

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{X_t}{(2t\log\log t)^{1/2}} = 3^{-1/4} \simeq 0.76.$$

S7.4 Per il Corollario 7.8, esiste un moto browniano W tale che, posto

$$A_t = \int_0^t \frac{ds}{1+s} = \log(1+t),$$

si ha $X_t = W_{A_t}$. Dunque, applicando il principio di riflessione al moto browniano W,

$$\begin{aligned}P\Big(\sup_{t\le 3} X_t \ge 1\Big) &= P\Big(\sup_{t\le 3} W_{A_t} \ge 1\Big) = P\Big(\sup_{s\le\log 4} W_s \ge 1\Big) = \\ &= 2P(\sqrt{\log 4}\, W_1 \ge 1) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{(\log 4)^{-1/2}}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx \simeq 0.396.\end{aligned}$$

S7.5 Il primo punto è ovvio, perché tutti i coefficienti di una matrice ortogonale sono più piccoli, in modulo, di 1. Per il criterio del Teorema 4.26, basta poi dimostrare che $Y_t^\lambda = e^{i\langle\lambda, X_t\rangle + \frac{1}{2}|\lambda|^2 t}$ è una $(\mathscr{F}_t)_t$-martingala. Per la formula di Ito, oppure direttamente per le (7.22) e (7.23), si ha

$$Y_t^\lambda = 1 + i\Big\langle\lambda, \int_0^t Y_s^\lambda O_s\, dB_s\Big\rangle.$$

Poiché $|Y_s^\lambda|$ è maggiorato per $s \le t$ da $e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2 t}$, il processo $(Y_s^\lambda O_s)_s$ è in $M^2([0, +\infty[)$ e dunque Y^λ è una $(\mathscr{F}_t)_t$-martingala, come si doveva dimostrare.

S7.6 Per la formula di Ito $d(\phi_t B_t) = \phi_t' B_t\, dt + \phi_t\, dB_t$. Dunque, per $T > 0$,

$$\int_0^T \phi_t' B_t\, dt + \int_0^T \phi_t\, dB_t = \phi_T B_T - \underbrace{\phi_0 B_0}_{=0} \qquad \text{q.c.}$$

Se T è abbastanza grande, in modo che il supporto di ϕ sia contenuto in $[0, T]$, si ha $\phi_T = 0$ e dunque

$$\int_0^T \phi_t' B_t\, dt = -\int_0^T \phi_t\, dB_t \qquad \text{q.c.}$$

Anzi a T si può sostituire $+\infty$, poiché i due integrandi sono nulli su $]T, +\infty[$.

S7.7 Ricordiamo che una funzione è armonica se

$$\triangle f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_m^2} = 0.$$

Per la formula di Ito

$$df(B_t)=\frac{1}{2}\underbrace{\triangle f(B_t)}_{=0}\,dt+f'(B_t)\,dB_t$$

e dunque $(f(B_t))_t$ è una martingala locale. Essa è per di più una martingala se il processo $(f'(B_t))_t$ si trova in $M^2([0,+\infty[)$. La condizione indicata nell'enunciato è sufficiente; Infatti si avrebbe $\mathrm{E}(|f'(B_t)|^2)\le \mathrm{E}(\mathrm{e}^{2M|B_t|})\le \mathrm{E}(\mathrm{e}^{2M\sqrt{t}|B_1|})$. Si ha

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta|B_1|})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\theta|x|}\mathrm{e}^{-|x|^2/2}\,dx<+\infty$$

per ogni $\theta\in\mathbb{R}$ e dunque, per ogni $T>0$,

$$\mathrm{E}\Big(\int_0^T|f'(B_t)|^2dt\Big)\le T\,\mathrm{E}(\mathrm{e}^{2M\sqrt{T}|B_1|})<+\infty.$$

S7.8 a) Posto $f(x,t)=x^3-3tx$, per la formula di Ito,

$$\begin{aligned}df(B_t,t)&=f_x(B_t,t)\,dB_t+f_t(B_t,t)\,dt+\tfrac{1}{2}f_{xx}(B_t,t)\,dt=\\&=f_x(B_t,t)\,dB_t+(\tfrac{1}{2}f_{xx}+f_t)(B_t,t)\,dt.\end{aligned}$$

È immediato che $\frac{1}{2}f_{xx}+f_t=0$; dunque, poiché $f(0,0)=0$,

$$f(B_t,t)=\int_0^t f_x(B_t,t)\,dB_t.$$

L'integrando è una funzione di $M^2([0,+\infty[)$ (è un polinomio in t e B_t) e quindi $X_t=f(B_t,t)$ è una martingala (di quadrato integrabile).

b) Il calcolo appena fatto mostra che $X_t=P_n(B_t,t)$ è una martingala se e solo se

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2P_n}{\partial x^2}+\frac{\partial P_n}{\partial t}=0.$$

Imponendo questa condizione ai coefficienti $c_{n,m}$, si vede che essa è equivalente a

$$\frac{1}{2}(n-2m)(n-2m-1)c_{n,m}=-(m+1)c_{n,m+1}.$$

Questa relazione, se si pone $c_{n,0}=1$, permette di calcolare tutti gli altri coefficienti uno dopo l'altro, determinando così P_n, a meno di una costante moltiplicativa. Si trovano facilmente i polinomi

$$\begin{aligned}P_1(x,t)&=x\\P_2(x,t)&=x^2-t\\P_3(x,t)&=x^3-3tx\\P_4(x,t)&=x^4-6tx^2+3t^2.\end{aligned}$$

I primi due danno luogo a delle martingale già note, mentre il terzo è il polinomio di a).

c) Il teorema di arresto, applicato alla martingala $(P_3(B_t,t))_t$ e al tempo d'arresto limitato $\tau\wedge n$ dà

$$\mathrm{E}(B^3_{\tau\wedge n})=3\,\mathrm{E}[(\tau\wedge n)B_{\tau\wedge n}].$$

È immediato applicare il Teorema di Lebesgue e passare al limite per $n\to\infty$ (le v.a. $B_{\tau\wedge n}$ sono tutte comprese tra $-a$ e b, mentre già sappiamo che τ è integrabile). Dunque, riprendendo i risultati dell'Esercizio 4.9

$$\mathrm{E}(\tau B_\tau)=\frac{1}{3}\,\mathrm{E}(B^3_\tau)=\frac{1}{3}\,\frac{-a^3b+ab^3}{a+b}=ab(b-a).$$

Se B_τ e τ fossero indipendenti si dovrebbe avere $\mathrm{E}(B_\tau\tau)=\mathrm{E}(B_\tau)\mathrm{E}(\tau)=0$. Dunque B_τ e τ *non* sono indipendenti se $a\ne b$. Se invece $a=b$, τ e B_τ sono non correlate. In realtà in questo caso esse sono indipendenti, come suggerisce un semplice argomento di simmetria. Più precisamente: il processo $(-B_t)_t$ è ancora un moto browniano il cui tempo d'uscita da $]-a,a[$ coincide con quello di B. Dunque le due coppie di v.a. (B_τ,τ) e $(-B_\tau,\tau)$ hanno la stessa legge. Ne segue che, per ogni boreliano $A\subset\mathbb{R}^+$,

$$\mathrm{P}(B_\tau=a,\tau\in A)=\mathrm{P}(B_\tau=-a,\tau\in A).$$

Poiché la somma delle due probabilità nella formula precedente vale $\mathrm{P}(\tau\in A)$, si ha

$$\mathrm{P}(B_\tau=a,\tau\in A)=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{P}(\tau\in A)=\mathrm{P}(B_\tau=a)\mathrm{P}(\tau\in A)$$

che prova l'indipendenza di B_τ e τ per $a=b$. In realtà questo punto era già stato provato nell'Esercizio 2.9 b), di cui non abbiamo fatto che ripetere il ragionamento.

S7.9 a) Perché la v.a. $H-X$ sia ortogonale a B_v deve essere

$$\begin{aligned}0=\mathrm{E}[(H-X)B_v]&=\mathrm{E}\Big[\Big(\int_0^{+\infty}h_u\,dB_u-\int_0^s\Phi_u\,dB_u-\alpha\int_0^{+\infty}g_u\,dB_u\Big)B_v\Big]=\\&=\int_0^v\big(h_u-\Phi_u-\alpha g_u\big)\,du.\end{aligned}$$

Poiché occorre che questa relazione valga per ogni $v\le s$, necessariamente deve essere $\Phi_u=h_u-\alpha g_u$. La condizione di ortogonalità rispetto a Y impone invece che sia

$$\begin{aligned}0=\mathrm{E}\Big[\Big(\int_0^{+\infty}h_u\,dB_u-\int_0^s\Phi_u\,dB_u-\alpha\int_0^{+\infty}g_u\,dB_u\Big)\int_0^{+\infty}g_u\,dB_u\Big]&=\\=\int_s^{+\infty}h_ug_u\,du-\alpha\int_s^{+\infty}g_u^2\,du\end{aligned}$$

e dunque

$$\alpha = \frac{\int_s^{+\infty} h_u g_u\,du}{\int_s^{+\infty} g_u^2\,du}.$$

In conclusione

$$X = \int_0^s h_u\,dB_u + \frac{\int_s^{+\infty} h_u g_u\,du}{\int_s^{+\infty} g_u^2\,du} \int_s^{+\infty} g_u\,dB_u.$$

b) Con le notazioni di a),

$$\mathrm{E}(H \mid \tilde{\mathscr{G}}_s) = X + \mathrm{E}(H - X \mid \tilde{\mathscr{G}}_s),$$

dato che X è $\tilde{\mathscr{G}}_s$-misurabile. Ora $H - X$ è centrata e indipendente da Y e da B_v, $v \le s$. Poiché le leggi congiunte sono gaussiane, per il criterio dell'Esercizio 2.1 c), $H - X$ è indipendente da $\tilde{\mathscr{G}}_s$ (si usa l'Osservazione p. 55). Dunque $\mathrm{E}(H \mid \tilde{\mathscr{G}}_s) = X$.

c) Si applica la formula trovata in b) con $h = 1_{[0,t]}$. Dunque

$$\mathrm{E}[B_t \mid \tilde{\mathscr{G}}_s] = B_s + \frac{\int_s^t g_u\,du}{\int_s^{+\infty} g_u^2\,du} \int_s^{+\infty} g_u\,dB_u.$$

Poiché supponiamo $g > 0$ q.o., $\mathrm{E}[B_t \mid \tilde{\mathscr{G}}_s] \ne B_s$ e $(B_t)_t$ *non* è né un moto browniano né una martingala rispetto a $(\tilde{\mathscr{G}}_t)_t$.

d) Si ha

$$Z_t = \frac{1}{\psi_t}\Big(Y - \int_0^t g_u\,dB_u\Big)$$

e dunque Z_t è $\tilde{\mathscr{G}}_t$-misurabile. Se $t \ge s$, per calcolare $\mathrm{E}[Z_t \mid \tilde{\mathscr{G}}_s]$ applichiamo ancora la formula trovata in b), con $h_u = \frac{1}{\psi_t} g_u 1_{[t,+\infty[}(u)$. Poiché $h = 0$ su $[0, s]$,

$$\mathrm{E}[Z_t \mid \tilde{\mathscr{G}}_s] = \frac{\int_t^{+\infty} g_u^2\,du}{\psi_s \psi_t} \int_s^{+\infty} g_u\,dB_u = Z_s.$$

e) Si deve provare che $(W_t)_t$ è un moto browniano naturale e poi che, per ogni $s \le t$, $W_t - W_s$ è indipendente da $\tilde{\mathscr{G}}_s$. Si ha, per $s \le t$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(W_t W_s) &= \mathrm{E}(B_t B_s) + \int_0^t g_u\,du \int_0^s g_v \mathrm{E}(Z_u Z_v)\,dv + \\
&\quad - \int_0^s g(u)\mathrm{E}(B_t Z_u)\,du - \int_0^t g_v \mathrm{E}(B_s Z_v)\,du = \\
&= s + I_1 - I_2 - I_3.
\end{aligned}$$

Si tratta di mostrare che $I_1 - I_2 - I_3 = 0$. Intanto, se $v \ge u$,

$$\mathrm{E}(Z_u Z_v) = \frac{1}{\psi_u \psi_v} \int_v^{+\infty} g_r^2\,dr = \frac{1}{\psi_u} = \frac{1}{\psi(u \wedge v)}$$

e, osservando che $B_t = \int_0^{+\infty} 1_{[0,t]}(v)\,dv$,

$$\mathrm{E}(B_t Z_u) = \begin{cases} \dfrac{1}{\psi_u} \displaystyle\int_u^t g_v\,dv & \text{se } t > u \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dunque

$$I_1 = \int_0^t g_u\,du \int_0^{u\wedge s} \frac{g_v}{\psi_v}\,dv + \int_0^t \frac{g_u}{\psi_u}\,du \int_{u\wedge s}^s g_v\,dv = J_1 + J_2$$

Inoltre

$$I_2 = \int_0^s \frac{g_u}{\psi_u}\,du \int_u^t g_v\,dv = \int_0^t g_v\,dv \int_0^{v\wedge s} g_u\,du = J_1$$

mentre

$$I_3 = \int_0^t g_u\,du \int_{u\wedge s}^s \frac{g_v}{\psi_u}\,dv = \int_0^s \frac{g_u}{\psi_u}\,du \int_{u\wedge s}^s g_v\,dv = J_2$$

Dunque $I_1 = I_2 + I_3$ e $(W_t)_t$ è un moto browniano naturale. Resta da mostrare che $W_t - W_s$, per $s \le t$, è indipendente da $\tilde{\mathscr{G}}_s$. Per verificare questo punto si può, ad esempio, mostrare direttamente che

$$\mathrm{E}[(W_t - W_s)H] = 0 = \mathrm{E}[W_t - W_s]\mathrm{E}[H]$$

per ogni v.a. della forma $H = B_v$, $v \le s$ oppure $H = Y$ e poi applicare l'Esercizio 2.1 c). Poiché $\mathrm{E}(Z_u B_v) = 0$ per $v \le u$,

$$\mathrm{E}[(W_t - W_s)B_v] = \mathrm{E}[(B_t - B_s)B_v] - \int_s^t g_u \mathrm{E}(Z_u B_v)\,du = 0$$

Inoltre, poiché $\mathrm{E}(Z_u Y) = 1$ e $\mathrm{E}[(B_t - B_s)Y] = \int_s^t g_u\,du$,

$$\mathrm{E}[(W_t - W_s)Y] = \mathrm{E}[(B_t - B_s)Y] - \int_s^t g_u \mathrm{E}(Z_u Y)\,du = \int_s^t g_u\,du - \int_s^t g_u\,du = 0$$

S7.10 a) Consideriamo per primo il caso $m \ge 3$. Si può scrivere $X_t = f(B_t)$, dove $f(z) = |z - x|^{-(m-2)}$. f è una funzione infinite volte derivabile al di fuori di ogni palla contenente x e si verifica direttamente che $\frac{1}{2}\Delta f(y) = 0$ per $y \ne x$. Per n fissato, applicando la formula di Ito a una funzione $C^2(\mathbb{R}^m)$ che coincida con f al di fuori della palla di centro x e raggio $\frac{1}{n}$, si ha

$$X_{t\wedge\tau_n} = |x|^{-(m-2)} + \int_0^{t\wedge\tau_n} f'(B_s)\,dB_s + \underbrace{\int_0^{t\wedge\tau_n} \frac{1}{2}\Delta f(B_s)\,ds}_{=0}.$$

Dunque $(X_{t\wedge\tau_n})_t$ è una martingala locale. Poiché per di più si tratta di un processo limitato ($0 \le X_{t\wedge\tau_n} \le n^{m-2}$), è anzi una martingala (vedi l'Osservazione p. 126). Dunque $|x|^{-(m-2)} = \mathrm{E}(X_{t\wedge\tau_n})$ per ogni $t \ge 0$. Poiché $X_{t\wedge\tau_n} = n^{m-2}$ su $\{\tau_n \le t\}$, $|x|^{-(m-2)} = \mathrm{E}(X_{t\wedge\tau_n}) \ge n^{m-2}\mathrm{P}(\tau_n \le t)$ e quindi $\mathrm{P}(\tau_n \le t) \le (nx)^{-(m-2)} \to 0$ per $n \to \infty$.

Poniamo $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n$ (la successione $(\tau_n)_n$ è crescente). Poiché $\{\tau_n \le t\} \searrow \{\tau \le t\}$, $\mathrm{P}(\tau \le t) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\tau_n \le t) = 0$ ovvero $\tau = +\infty$ q.c.

Se $m = 2$, si inizia allo stesso modo. La funzione $f(z) = -\log(|z - x|)$ è anch'essa armonica su $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ e per la formula di Ito

$$X_{t\wedge\tau_n} = -\log|x| + \int_0^{t\wedge\tau_n} f'(B_s)\,dB_s$$

e $(X_{t\wedge\tau_n})_t$ è una martingala locale. In questo caso però non si tratta di un processo limitato. Perché sia una martingala basta però che il processo $Y_s = f'(B_s)1_{\{s\le\tau_n\}}$ appartenga $M^2([0,+\infty[)$. Ma $|f'(z)| = |z - x|^{-1}$ e dunque

$$|f'(B_s)|1_{\{s\le\tau_n\}} = |B_s - x|^{-1}1_{\{s\le\tau_n\}} \le n$$

che prova l'appartenenza a $M^2([0,+\infty[)$. Il resto della dimostrazione è inalterato. Questo ragionamento comunque funziona anche per $m \ge 3$.

b) Fissiamo $N > 0$. Allora

$$\mathrm{P}(B_t = x \text{ per qualche } t \le N) = \mathrm{P}(\tau_n \le N \text{ per ogni } n) = 0$$

e basta ora passare al limite per $N \to \infty$.

c) Grazie ad a), $(X_t)_t$ è una martingala locale. Per l'uniforme integrabilità, mostriamo che $\sup_{t>0}\mathrm{E}(X_t^p) < +\infty$ per ogni $p < m(m-2)^{-1}$ e quindi si tratta di un processo limitato in L^p per qualche $p > 1$. È possibile anche verificare direttamente la definizione, con calcoli sostanzialmente equivalenti. Poniamo $r = p(m-2)$; allora

$$\mathrm{E}(X_t^p) = \mathrm{E}(|B_t - x|^{-r}) = \frac{1}{(2\pi t)^{m/2}}\int |y - x|^{-r}\mathrm{e}^{-|y|^2/2t}\,dy.$$

Spezziamo l'integrale i due parti: la prima su una palla B_x di centro x e raggio $\frac{1}{2}|x|$, la seconda sul complementare B_x^c. Poiché $|y - x|^{-r} \le |x|^{-r}2^r$ al di fuori di B_x, il secondo pezzo è più piccolo di

$$\frac{2^r}{|x|^r(2\pi t)^{m/2}}\int \mathrm{e}^{-|y|^2/2t}\,dy = \frac{2^r}{|x|^r}\cdot$$

Il primo pezzo invece si controlla osservando che dentro B_x si ha $|y| \ge \frac{1}{2}|x|$ e dunque $\mathrm{e}^{-|y|^2/2t} \le \mathrm{e}^{-|x|^2/4t}$. Il primo pezzo è dunque più piccolo di

$$\frac{1}{(2\pi t)^{m/2}}\mathrm{e}^{-|x|^2/4t}\int_{|y-x|\le\frac{1}{2}|x|} |y - x|^{-r}\,dy = \frac{1}{(2\pi t)^{m/2}}\mathrm{e}^{-|x|^2/4t}\int_{|z|\le\frac{1}{2}|x|} |z|^{-r}\,dy =$$

$$= const\frac{1}{(2\pi t)^{m/2}}\mathrm{e}^{-|x|^2/4t}\int_0^{\frac{1}{2}|x|} \rho^{m-1-r}\,d\rho.$$

Se $p < m(m-2)^{-1}$, si ha $r < m$ e l'integrale nell'ultimo membro è convergente. La quantità $\mathrm{E}(X_t^p)$ è limitata in t e X è uniformemente integrabile.

Se X, che è uniformemente integrabile, fosse una martingala, allora il limite $X_\infty = \lim_{t\to+\infty} X_t$ esisterebbe q.c. e in L^1. Ma per la legge del logaritmo iterato esiste q.c. una successione di tempi $(t_n)_n$ con $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$ tale che $\lim_{n\to\infty}|B_{t_n}| = +\infty$, dunque deve essere necessariamente $X_\infty = 0$ q.c., in contraddizione con il fatto che la convergenza deve avere luogo anche in L^1.

• Questo esercizio contiene due punti che meritano di essere sottolineati. Innanzitutto il fatto che per $m \ge 2$ un punto $x \ne 0$ fissato viene visitato con probabilità 0 da un moto browniano. In secondo luogo che una martingala locale uniformemente integrabile non è necessariamente una martingala.

S7.11 a) Basta applicare il Teorema 7.16: qui $\int_0^t |H_s|^2\,ds = t$ e dunque $A(t) = t$, $\tau(t) = t$ q.c.

b) Sia g_n una funzione su $\mathbb{R}^m$ tale che $g_n(z) = |z + x|$ per $|z + x| \ge \frac{1}{n}$ prolungata per $|z + x| < \frac{1}{n}$ in maniera da essere $C^2(\mathbb{R}^m)$. Per $|z + x| \ge \frac{1}{n}$ si ha dunque

$$\frac{\partial g_n}{\partial z_i}(z) = \frac{z_i + x_i}{|z + x|}, \qquad \frac{\partial g_n^2}{\partial z_i\partial z_j}(z) = \frac{\delta_{ij}}{|z + x|} - \frac{(z_i + x_i)(z_j + x_j)}{|z + x|^3}$$

ed è immediato che

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial g_n^2}{\partial z_i^2} = \frac{m-1}{|z + x|}\cdot$$

Se $\tau_n = \inf\{t; |B_t + x| < \frac{1}{n}\}$ la formula di Ito dà

$$|B_{t\wedge\tau_n} + x| = |x| + \int_0^{t\wedge\tau_n} \frac{B_s + x}{|B_s + x|}\,dB_s + \int_0^{t\wedge\tau_n} \frac{m-1}{2|B_s + x|}\,ds.$$

Per il punto a) il processo

$$\beta_t = \int_0^t \frac{B_s + x}{|B_s + x|}\,dB_s$$

è un moto browniano. Inoltre sappiamo, per l'Esercizio 7.10, che $\tau_n \to +\infty$ per $n \to \infty$. Dunque passando al limite per $n \to \infty$ e ponendo $\xi = |x|$,

$$X_t = \xi + \int_0^t \frac{m-1}{2X_s}\,ds + \beta_t$$

che dà il differenziale stocastico cercato.

c) Se $f \in C_K^2(]0, +\infty[)$, allora per la formula di Ito

$$df(X_t) = f'(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\,dt = Lf(X_t)\,dt + f'(X_t)\,d\beta_t$$

dove

$$L = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{m-1}{2y}\frac{d}{dy}\cdot$$

Poiché f è a supporto compatto, la sua derivata è limitata e dunque la speranza matematica dell'integrale stocastico $\int_0^t f'(X_s)\,d\beta_s$ è nulla. In conclusione

$$\frac{1}{t}\left(\mathrm{E}[f(X_t)] - f(\xi)\right) = \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{E}[Lf(X_s)]\,ds \underset{t\to+0}{\to} Lf(\xi).$$

S7.12 Per il Teorema di Girsanov, se

$$\tilde{Z}_t = \mathrm{e}^{cB_t - \frac{1}{2}c^2 t},$$

allora $W_s = B_s - cs$ è un moto browniano per $s \le t$ rispetto alla probabilità $d\mathrm{Q} = Z_t\,d\mathrm{P}$. Dunque, rispetto a Q, scrivendo $B_s = W_s + cs$, $(B_s)_{s\le t}$ ha la stessa legge di $(Y_s)_{s\le t}$. Se ne deduce che P^Y è la legge di $(B_t)_t$ rispetto a Q. Se $0 \le t_1 < \ldots < t_m \le t$ e $f_1, \ldots, f_m$ sono funzioni boreliane limitate, si ha

$$\mathrm{E}^{\mathrm{P}^Y}[f_1(X_{t_1})\ldots f_m(X_{t_1})] = \mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[f_1(B_{t_1})\ldots f_m(B_{t_1})] =$$
$$= \mathrm{E}[f_1(B_{t_1})\ldots f_m(B_{t_1})\,\mathrm{e}^{cB_t - \frac{1}{2}c^2 t}] = \mathrm{E}^{\mathrm{P}^B}[f_1(X_{t_1})\ldots f_m(X_{t_1})\,\mathrm{e}^{cX_t - \frac{1}{2}c^2 t}],$$

da cui si ricava facilmente che, su $\mathcal{M}_t$, le due probabilità P^Y e $\mathrm{e}^{cX_t - \frac{1}{2}c^2 t}d\mathrm{P}^B$ hanno le stesse distribuzioni dimensione finita. Poniamo $Z_t = \mathrm{e}^{cX_t - \frac{1}{2}c^2 t}$. Poiché $Z_t > 0$, si ha anche $\mathrm{P}^B \ll \mathrm{P}^Y$ su $\mathcal{M}_t$.

Se P^Y fosse assolutamente continua rispetto a P^B su $\mathcal{M}$ e Z fosse la densità relativa, allora sappiamo (Esercizio 4.11) che deve essere $Z_t = \mathrm{E}(Z \mid \mathcal{M}_t)$. Se così fosse $(Z_t)_t$ sarebbe una martingala uniformemente integrabile (rispetto a P^B), il che non è, poiché sappiamo (Esercizio 4.4) che $\lim_{t\to+\infty} Z_t = 0$ P^B-q.c., mentre $\mathrm{E}^{\mathrm{P}^B}(Z_t) = 1$.

Un altro argomento per vedere quest'ultimo punto: rispetto a P^Y, se $c > 0$ ad esempio, si ha $\lim_{t\to+\infty} X_t = +\infty$ q.c. Dunque l'evento $\{\lim_{t\to+\infty} X_t = +\infty\}$ ha probabilità 1 rispetto a P^Y, ma probabilità 0 rispetto a P^B, dato che sotto quest'ultima probabilità $(X_t)_t$ è un moto browniano e dunque $\underline{\lim}_{t\to+\infty} X_t = -\infty$ per la legge del logaritmo iterato. Questo argomento prova anzi che su $\mathcal{M}$ le due probabilità sono ortogonali.

b) Per la legge del logaritmo iterato

$$\overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{X_t}{\left(2t\log\log\frac{1}{t}\right)^{1/2}} = 1 \qquad \mathrm{P}^B\text{-q.c.}$$
$$\overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{X_t}{\left(2t\log\log\frac{1}{t}\right)^{1/2}} = \sigma^2 \qquad \mathrm{P}^Z\text{-q.c.}$$

Queste due relazioni permettono immediatamente di costruire degli eventi in $\mathcal{M}_t$, per ogni t, aventi probabilità 1 rispetto a P^B e 0 rispetto a P^Z.

S7.13 a) Basta naturalmente considerare il caso $\nu \ll \mu$. Poiché $-\log$ è una funzione convessa su $\mathbb{R}^+$ e $\log\frac{d\nu}{d\mu} = -\log\frac{d\mu}{d\nu}$, per la disuguaglianza di Jensen,

$$H(\nu;\mu) = \int_E \log\tfrac{d\nu}{d\mu}\,d\nu \ge -\log\Big(\int_E \tfrac{d\mu}{d\nu}\,d\nu\Big) = -\log\Big(\int_E d\mu\Big) = -\log(1) = 0.$$

Poiché, per di più, $-\log$ è strettamente convessa, la disuguaglianza è stretta, a meno che la funzione $\frac{d\nu}{d\mu}$ non assuma un solo valore μ-q.c. Poiché in ogni caso l'integrale di $\frac{d\nu}{d\mu}$ rispetto a μ deve valere 1, ciò accade se e solo se $\frac{d\nu}{d\mu} = 1$ μ-q.c. e quindi se $\nu = \mu$.

Un modo semplice per trovare un esempio che mostri che l'entropia non è simmetrica nei suoi due argomenti consiste nel considerare una misura μ tale che esista un insieme A con $0 < \mu(A) < 1$ e porre poi $d\nu = \mu(A)^{-1}1_A\,d\mu$. La misura μ non è assolutamente continua rispetto a ν, poiché $\nu(A^c) = 0$ mentre $\mu(A^c) > 0$; dunque $H(\mu;\nu) = +\infty$. Invece $\nu \ll \mu$ e si calcola immediatamente $H(\nu;\mu) = -\log\mu(A) < +\infty$.

b) Per il Teorema 7.22 di Girsanov, P_1 è assolutamente continua su $\mathcal{M}_T$ rispetto alla misura di Wiener P e

$$\frac{d\mathrm{P}_1}{d\mathrm{P}} = \exp\Big(-\int_0^T \gamma'_s\,dX_s - \frac{1}{2}\int_0^T |\gamma'_s|^2\,ds\Big) \stackrel{def}{=} Z.$$

L'entropia $H(\mathrm{P}_1;\mathrm{P})$ non è altro che la media rispetto a P_1 del logaritmo di questa densità. Però, rispetto a P_1, per $t \le T$ si ha che $B_t \stackrel{def}{=} X_t - \gamma_t$ è un moto browniano. Dunque (la speranza dell'integrale stocastico è nulla),

$$\mathrm{E}^{\mathrm{P}_1}\big(\log\tfrac{d\mathrm{P}_1}{d\mathrm{P}}\big) = \mathrm{E}^{\mathrm{P}}\Big(-\int_0^T \gamma'_s\,dB_s + \int_0^T |\gamma'_s|^2\,ds - \frac{1}{2}\int_0^T |\gamma'_s|^2\,ds\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^T |\gamma'_s|^2\,ds = \frac{1}{2}\|\gamma'\|_2^2.$$

Molto simile è il calcolo dell'entropia $H(\mathrm{P};\mathrm{P}_1)$. Si ha, chiaramente,

$$\frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{P}_1}=\exp\Big(\int_0^T\gamma'_s\,dX_s+\frac{1}{2}\int_0^T|\gamma'_s|^2\,ds\Big)$$

e, poiché rispetto a P $(X_t)_{t\le T}$ è un moto browniano,

$$H(\mathrm{P};\mathrm{P}_1)=\mathrm{E}^{\mathrm{P}}\Big(\int_0^T\gamma'_s\,dX_s+\frac{1}{2}\int_0^T|\gamma'_s|^2\,ds\Big)=\frac{1}{2}\int_0^T|\gamma'_s|^2\,ds=\frac{1}{2}\|\gamma'\|_2^2.$$

Qui le due entropie $H(\mathrm{P};\mathrm{P}_1)$ e $H(\mathrm{P}_1;\mathrm{P})$ coincidono.

c) Sviluppando il quadrato si vede che, se $\nu\ll\mu$,

$$\chi^2(\nu;\mu)=\int_E\big[(\tfrac{d\nu}{d\mu})^2-2\tfrac{d\nu}{d\mu}+1\big]\,d\mu=\int_E(\tfrac{d\nu}{d\mu})^2\,d\mu-1.$$

Ora

$$\mathrm{E}^{\mathrm{P}}(Z^2)=\mathrm{E}^{\mathrm{P}}\Big[\exp\Big(-\int_0^T2\gamma'_s\,dX_s-\int_0^T|\gamma'_s|^2\,ds\Big)\Big]=$$
$$\mathrm{E}^{\mathrm{P}}\Big[\exp\Big(-\int_0^T2\gamma'_s\,dX_s\Big)\Big]\exp\Big(-\int_0^T|\gamma'_s|^2\,ds\Big)=$$
$$=\exp\Big(2\int_0^T|\gamma'_s|^2\,ds\Big)\exp\Big(-\int_0^T|\gamma'_s|^2\,ds\Big)=\mathrm{e}^{\|\gamma'\|_2^2}.$$

Dunque $\chi^2(\mathrm{P}_1;\mathrm{P})=\mathrm{E}^{\mathrm{P}}(Z^2)-1=\mathrm{e}^{\|\gamma'\|_2^2}-1$. Allo stesso modo si calcola $\chi^2(\mathrm{P};\mathrm{P}_1)$, che dà lo stesso risultato.

S7.14 a) $(Z_t)_t$ è una martingala per la Proposizione 7.19. Si può anche verificare direttamente che $\mathrm{E}(Z_t)=1$ (Z_t ha legge lognormale) e, poiché $(Z_t)_t$ è una supermartingala (è una martingala locale ≥ 0), è una martingala (vedi l'Esercizio 4.1). $\tilde B$ è un moto browniano per il Teorema di Girsanov 7.22 (qui $\Phi(s)\equiv 2\theta$).

b) Si ha

$$Z_t^{-1}=\mathrm{e}^{-2\theta B_t+2\theta^2t}=\mathrm{e}^{-2\theta\tilde B_t-2\theta^2t}.\tag{12.18}$$

Per mostrare che $(Z_t^{-1})_t$ è una Q-martingala basta ripetere il ragionamento di a), osservando che $\tilde B$ è un Q-moto browniano. Più semplicemente si può osservare che, su $\mathcal{F}_t$, $d\mathrm{P}=Z_t^{-1}\,d\mathrm{Q}$, e quindi necessariamente $(Z_t^{-1})_t$ è una Q-martingala (Esercizio 4.11).

c) Poiché $\{\tau_R\le T\}\in\mathcal{F}_T$,

$$\mathrm{P}(\tau_R\le T)=\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}(1_{\{\tau_R\le T\}}Z_T^{-1}).$$

Ma si ha anche $\{\tau_R\le T\}\in\mathcal{F}_{\tau_R}$ e dunque $\{\tau_R\le T\}\in\mathcal{F}_{T\wedge\tau_R}$. Dunque, condizionando rispetto a $\mathcal{F}_{T\wedge\tau_R}$ e usando il teorema di arresto delle martingale (Teorema 4.21)

$$\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}(1_{\{\tau_R\le T\}}Z_T^{-1})=\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}(1_{\{\tau_R\le T\}}Z_T^{-1}\mid\mathcal{F}_{T\wedge\tau_R})]=$$
$$=\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[1_{\{\tau_R\le T\}}\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}(Z_T^{-1}\mid\mathcal{F}_{T\wedge\tau_R})]=\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}(1_{\{\tau_R\le T\}}Z_{T\wedge\tau_R}^{-1}).$$

Ma, poiché $Z_t^{-1}=\mathrm{e}^{-2\theta X_t}$, $Z_{T\wedge\tau_R}^{-1}=\mathrm{e}^{-2\theta X_{T\wedge\tau_R}}$. Poiché $X_{T\wedge\tau_R}=R$ su $\{\tau_R\le T\}$, si ha $Z_{T\wedge\tau_R}^{-1}1_{\{\tau_R\le T\}}=\mathrm{e}^{-2\theta R}1_{\{\tau_R\le T\}}$ da cui segue la (7.33).

d) Basta mandare $T\to+\infty$ e osservare che, rispetto a Q, si ha $X_t=\tilde B_t+\theta t$. Dunque $\lim_{t\to+\infty}X_t=+\infty$ Q-q.c. e $\mathrm{Q}(\tau_R<+\infty)=1$.

• Il lettore attento avrà osservato nell'ultimo passaggio al limite una certa disinvoltura (la probabilità Q in realtà dipende anch'essa da T). Non è però difficile completare con cura il ragionamento.

S7.15 a) Si ha ovviamente $\mathrm{Q}(Z_t>0)=\mathrm{E}^{\mathrm{P}}(Z_t1_{\{Z_t>0\}})=\mathrm{E}^{\mathrm{P}}(Z_t)=1$. Dunque $Z_t>0$ Q-q.c. e anche P-q.c., dato che P e Q sono supposte equivalenti.

b) Conseguenza immediata del Teorema 7.27, di rappresentazione delle martingale.

c) Sia f una funzione tale che $f(x)=\log x$ per $x\ge\frac{1}{n}$ e poi prolungata a tutto $\mathbb{R}$ in modo da essere di classe C^2. Allora, per la formula di Ito,

$$df(Z_t)=f'(Z_t)\,dZ_t+\frac{1}{2}f''(Z_t)|\Psi_t|^2\,dt.$$

Le derivate di f coincidono con quelle di $\log x$ per $x\ge\frac{1}{n}$, per cui

$$\log Z_{t\wedge\tau_n}=\int_0^{t\wedge\tau_n}\frac{\Psi_s}{Z_s}\,dB_s-\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_n}\frac{|\Psi_s|^2}{Z_s^2}\,ds$$

(è facile infatti vedere che $Z_0=1$ q.c. Perché?). Si può supporre $(Z_t)_t$ continua, grazie a b). Per a) e per l'Esercizio 4.3 b) si ha $Z_t>0$ per ogni $t\le T$ q.c. e dunque $(Z_t)_t$ non si annulla mai q.c. Anzi, poiché è continua esiste $\varepsilon>0$ tale che $Z_t\ge\varepsilon$ per $t\le T$. Dunque $\Phi_s=\frac{\Psi_s}{Z_s}\in\Lambda^2([0,T])$ e la (7.35) è provata.

Basta ora mandare $n\to\infty$ e osservare che, sempre perché $Z_t>0$ per ogni t q.c., $\tau_n\to+\infty$.

S8.1 a) Si segue la falsariga del ragionamento del paragrafo 8.2. La soluzione dell'equazione ordinaria

$$x'_t=b(t)x_t$$
$$x_0=x$$

è $x_t=\mathrm{e}^{\Lambda(t)}x$, dove $\Lambda(t)=\int_0^t b(s)\,ds$. Cerchiamo una soluzione di (8.27) della forma $x_t=\mathrm{e}^{\Lambda(t)}C(t)$. Si vede facilmente che C deve essere soluzione di

$$\mathrm{e}^{\Lambda(t)}\,dC(t)=\sigma(t)\,dB_t$$

e cioè

$$C(t) = \int_0^t e^{-\Lambda(s)} \sigma(s)\, dB_s.$$

La soluzione di (8.27) è dunque

$$\xi_t = e^{\Lambda(t)} x + e^{\Lambda(t)} \int_0^t e^{-\Lambda(s)} \sigma(s)\, dB_s.$$

Poiché l'integrale stocastico di una funzione deterministica è, come funzione dell'estremo d'integrazione, un processo gaussiano (Proposizione 6.18), ξ è gaussiano. Evidentemente $E(\xi_t) = e^{\Lambda(t)} x$. Calcoliamo la funzione di covarianza. Sia $s \le t$ e poniamo

$$Y_t = e^{\Lambda(t)} \int_0^t e^{-\Lambda(s)} \sigma(s)\, dB_s.$$

Allora, per la Proposizione 7.12,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\xi_t, \xi_s) &= E(Y_t Y_s^*) = \\ &= E\Big[e^{\Lambda(t)} \int_0^t e^{-\Lambda(u)} \sigma(u)\, dB_u \Big(e^{\Lambda(s)} \int_0^s e^{-\Lambda(v)} \sigma(v)\, dB_v\Big)^*\Big] = \\ &= e^{\Lambda(t)} E\Big[\int_0^s e^{-\Lambda(u)} \sigma(u)\, dB_u \Big(\int_0^t e^{-\Lambda(v)} \sigma(v)\, dB_v\Big)^*\Big] e^{\Lambda(s)^*} = \\ &= e^{\Lambda(t)} \int_0^s e^{-\Lambda(v)} \sigma(v) \sigma^*(v)\, e^{-\Lambda(v)^*}\, dv\, e^{\Lambda(s)^*}. \end{aligned} \tag{12.19}$$

In particolare per $m = 1$ la covarianza vale

$$e^{\Lambda(t)} e^{\Lambda(s)} \int_0^s e^{-2\Lambda(v)} \sigma^2(v)\, dv.$$

b) Per a) la legge di ξ_t è gaussiana di media $e^{bt} x$ e di matrice di covarianza

$$\Gamma_t = \lambda^2 \int_0^t e^{2b(t-s)}\, ds = \frac{\lambda^2}{2} b^{-1} (e^{2bt} - I).$$

Poiché b è supposta definita negativa,

$$\lim_{t \to +\infty} e^{bt} x = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} \Gamma_t = -\frac{\lambda^2}{2} b^{-1}.$$

Ciò implica (Esercizio 0.13) che la legge di ξ_t converge strettamente, per $t \to +\infty$ a una legge gaussiana di media 0 e matrice di covarianza $-\frac{1}{2}\lambda^2 b^{-1}$. Questa legge è stazionaria per l'Esercizio 5.16 d).

c) Si ha, per questa equazione,

$$\Lambda(t) = \int_0^t -\frac{1}{1-s}\, ds = \log(1-t).$$

Dunque $e^{\Lambda(t)} = 1 - t$ e la soluzione di (8.28) è

$$\xi_t = (1-t)x + (1-t) \int_0^1 \frac{dB_s}{1-s}.$$

Si tratta di un processo gaussiano di funzione di covarianza

$$K(t,s) = (1-t)(1-s) \int_0^s \frac{1}{(1-v)^2}\, dv = (1-t)(1-s)\Big(\frac{1}{(1-s)} - 1\Big) = s(1-t),$$

per $s \le t$. Se $\xi_0 = 0$, allora $E(\xi_t) = 0$ per ogni t e il processo ha le stesse distribuzioni di dimensioni finita di un ponte browniano.

S8.2 a) Siano B un moto browniano e σ una radice quadrata di a. L'EDS associata a L è

$$\begin{aligned} d\xi_t &= b\xi_t\, dt + \sigma\, dB_t \\ \xi_0 &= x. \end{aligned}$$

Per l'Esercizio 8.1 a) (ora la matrice b non dipende dal tempo), essa ha soluzione

$$\xi_t = e^{bt} x + e^{bt} \int_0^t e^{-bs} \sigma\, dB_s.$$

La legge di ξ_t è dunque gaussiana di media $e^{bt} x$ e di matrice di covarianza

$$\Gamma = E\Big[\Big(\int_0^t e^{b(t-s)} \sigma\, dB_s\Big)\Big(\int_0^t e^{b(t-s)} \sigma\, dB_s\Big)^*\Big].$$

Come per la (12.19) si trova

$$\Gamma = \int_0^t \big(e^{b(t-s)}\sigma\big)\big(e^{b(t-s)}\sigma\big)^*\, ds = \int_0^t e^{bu} \sigma\sigma^* e^{b^* u}\, du = \int_0^t e^{bu} a e^{b^* u}\, du \tag{12.20}$$

(l'esponenziale della trasposta è uguale alla trasposta dell'esponenziale). Poiché la funzione di transizione $p(t, x, \cdot)$ non è altro che la legge di ξ_t con la condizione iniziale $\xi_0 = x$, la funzione di transizione ha densità se e solo se Γ è invertibile (vedi il paragrafo 0.7 e l'Esercizio 0.4). Se a è definita positiva esiste un numero $\mu > 0$ tale che per ogni $y \in \mathbb{R}^m$ sia $\langle ay, y\rangle \ge \mu |y|^2$. Dunque, se $y \ne 0$,

$$\langle \Gamma y, y\rangle = \int_0^t \langle e^{bu} a e^{b^* u} y, y\rangle\, du = \int_0^t \langle a e^{b^* u} y, e^{b^* u} y\rangle\, du \ge \int_0^t \mu |e^{b^* u} y|^2\, du > 0.$$

Infatti se $y \neq 0$, si ha $|e^{b^*u}y| > 0$, dato che l'esponenziale di una matrice è sempre una matrice invertibile.

b) L'operatore in (8.30) è della forma (8.29) con

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Naturalmente $\sigma = a$; calcoliamo la matrice di covarianza Γ di $p(t, x, \cdot)$, sostituendo i valori in (12.20). Si vede subito che $b^2 = b^3 = \ldots = 0$. Dunque

$$e^{bu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k u^k}{k!} = I + bu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$e^{bu} a e^{b^* u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u \\ u & u^2 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \end{pmatrix}.$$

Γ è quindi invertibile per ogni t. Viceversa, per l'operatore in (8.31), si ha

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e^{bu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^u \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$e^{bu} a e^{b^* u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\Gamma = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che non è invertibile.

c) Cominciamo col supporre che esista un sottospazio non banale contenuto nel nucleo (ker) di a e invariante per l'azione di b^*. Allora esisterebbe un vettore non nullo $y \in \ker a$ tale che $b^{*i} y \in \ker a$ per ogni $i = 1, 2, \ldots$ Ne segue che anche $e^{b^* u} y \in \ker a$. Dunque per un tale vettore si avrebbe

$$\langle \Gamma y, y \rangle = \int_0^t \langle a e^{b^* u} y, e^{b^* u} y \rangle \, du = 0$$

e Γ non può essere invertibile. Viceversa se Γ non fosse invertibile, esisterebbe un vettore $y \in \mathbb{R}^m$ tale che $\langle \Gamma y, y \rangle = 0$. Poiché $\langle a e^{b^* u} y, e^{b^* u} y \rangle \geq 0$, deve essere $\langle a e^{b^* u} y, e^{b^* u} y \rangle = 0$ per ogni $u \leq t$ e dunque

$$a e^{b^* u} y = 0$$

per ogni $u \leq t$. Intanto, per $u = 0$, questa relazione implica $y \in \ker a$. Poi derivando e ponendo $u = 0$ si trova che deve essere $ab^* y = 0$. In maniera simile, derivando n volte e ponendo $u = 0$ si trova $ab^{*n} y = 0$ per ogni n. Il sottospazio generato dai vettori $y, b^* y, b^{*2} y, \ldots$ è non triviale, invariante per l'azione di b^* e contenuto in $\ker a$.

S8.3 a) L'equazione (8.32) è lineare e si risolve facilmente. Si trova

$$u_t = e^{\theta t} x + \frac{\alpha}{\theta} (e^{\theta t} - 1) \stackrel{def}{=} \Gamma_t(x).$$

Il processo $(Z_t)_t$ deve soddisfare $Z_0 = x$. Inoltre, per la formula di Ito,

$$d(\Gamma_t(Z_t)) = \frac{\partial \Gamma_t}{\partial t}(Z_t)\, dt + \frac{\partial \Gamma_t}{\partial x}(Z_t)\, dZ_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Gamma_t}{\partial x^2}(Z_t)\, d\langle Z \rangle_t.$$

In questo caso Γ_t è una funzione lineare-affine di x e

$$\frac{\partial \Gamma_t}{\partial x}(x) \equiv e^{\theta t}, \qquad \frac{\partial^2 \Gamma_t}{\partial x^2}(x) \equiv 0.$$

Inoltre, per definizione,

$$\frac{\partial \Gamma_t}{\partial t}(Z_t) = \alpha + \theta \Gamma_t(Z_t).$$

$(Z_t)_t$ deve dunque risolvere $Z_0 = x$ e

$$(\alpha + \theta \Gamma_t(Z_t))\, dt + e^{\theta t}\, dZ_t = d(\Gamma_t(Z_t)) = (\alpha + \theta \Gamma_t(Z_t))\, dt + \sigma\, dB_t,$$

cioè $e^{\theta t}\, dZ_t = \sigma\, dB_t$; dunque

$$Z_t = x + \int_0^t e^{-\theta s} \sigma\, dB_s.$$

La soluzione di (8.33) è

$$\xi_t = \Gamma_t(Z_t) = e^{\theta t} x + \frac{\alpha}{\theta} (e^{\theta t} - 1) + e^{\theta t} \int_0^t e^{-\theta s} \sigma\, dB_s. \tag{12.21}$$

Si tratta di un processo gaussiano (facile applicazione della Proposizione 6.18) di media

$$\mu_t = e^{\theta t} x + \frac{\alpha}{\theta} (e^{\theta t} - 1) \tag{12.22}$$

e varianza

$$\sigma_t^2 = \int_0^t e^{2\theta(t-s)} \sigma^2\, ds = \frac{\sigma^2}{2\theta} (e^{2\theta t} - 1). \tag{12.23}$$

b) Per la formula di Ito

$$d(\log Y_t) = \frac{1}{Y_t}\,dY_t - \frac{1}{2Y_t^2}\,d\langle Y\rangle_t = (b + \theta \log Y_t)\,dt + \sigma\,dB_t - \frac{\sigma^2}{2}\,dt.$$

Dunque $\xi_t = \log Y_t$ è soluzione di

$$\begin{aligned} d\xi_t &= \big(b - \tfrac{\sigma^2}{2} + \theta \xi_t\big)\,dt + \sigma\,dB_t \\ \xi_0 &= x = \log y \end{aligned} \tag{12.24}$$

Grazie ad a) la soluzione è data dalla (12.21), con $\alpha = b - \frac{1}{2}\sigma^2$ e $x = \log y$. Dunque $Y_t = e^{\xi_t} > 0$ per ogni t q.c. L'unicità segue dall'unicità delle soluzioni di (12.24). Inoltre, sempre grazie ad a), Y_t ha legge lognormale (vedi l'Esercizio 0.11 per la definizione) di parametri μ_t e σ_t^2 dati da (12.22) e (12.23), con $\alpha = b - \frac{1}{2}\sigma^2$. Se $\theta < 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} \mu_t &= -\frac{1}{\theta}\Big(b - \frac{\sigma^2}{2}\Big) \\ \lim_{t\to+\infty} \sigma_t^2 &= -\frac{\sigma^2}{2\theta}. \end{aligned}$$

Y_t converge in legge a una distribuzione lognormale con questi parametri.

S8.4 Intanto $X_t = B_t - tB_1$ è un processo adattato alla filtrazione $(\tilde{\mathscr{F}}_t)_t$, dove $\tilde{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_t \vee \sigma(B_1)$ (vedi l'Esercizio 2.11). Inoltre, poiché

$$d\tilde{B}_t = dB_t + \frac{B_1 - B_t}{1-t}\,dt,$$

si ha

$$-\frac{X_t}{1-t}\,dt + d\tilde{B}_t = -\frac{B_t - tB_1}{1-t}\,dt + \frac{B_1 - B_t}{1-t}\,dt + dB_t = dB_t - B_1\,dt = dX_t$$

che è quello che si voleva dimostrare.

S8.5 a) È immediato:

$$\begin{aligned} d\eta_t^\varepsilon &= d\xi_t^\varepsilon - \gamma_t'\,dt = (b(\xi_t^\varepsilon) - b(\gamma_t))\,dt + \varepsilon\sigma(\xi_t^\varepsilon)\,dB_t = \\ &= (b(\eta_t^\varepsilon + \gamma_t) - b(\gamma_t))\,dt + \varepsilon\sigma(\eta_t^\varepsilon + \gamma_t)\,dB_t. \end{aligned}$$

b) Se $\omega \in \big\{\sup_{0\le s\le T} \big|\varepsilon \int_0^s \sigma(\eta_u^\varepsilon + \gamma_u)\,dB_u\big| < \alpha\big\}$, allora, per $t \le T$,

$$|\eta_t^\varepsilon| \le \int_0^t |b(\eta_s^\varepsilon + \gamma_s) - b(\gamma_s)|\,ds + \alpha \le L\int_0^t |\eta_s^\varepsilon|\,ds + \alpha$$

e, per il lemma di Gronwall, si ha $|\eta_t^\varepsilon| \le \alpha e^{LT}$ per $t \le T$. Passando al complementare

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\Big(\sup_{0\le s\le T} |\eta_s^\varepsilon| \ge \alpha\Big) &\le \mathrm{P}\Big(\sup_{0\le s\le T} \Big|\int_0^s \sigma(\eta_u^\varepsilon + \gamma_u)\,dB_u\Big| \ge \frac{\alpha}{\varepsilon}\,e^{-LT}\Big) \le \\ &\le 2\exp\Big[-\frac{1}{\varepsilon^2}\,\frac{\alpha^2 e^{-2LT}}{2T\|\sigma\|_\infty^2}\Big] \end{aligned}$$

grazie alla maggiorazione esponenziale, Proposizione 7.5. Poiché $\eta_s^\varepsilon = \xi_s^\varepsilon - \gamma_s$ e per l'arbitrarietà di α, questa relazione implica che ξ^ε, per $\varepsilon \to 0$, converge in probabilità a una v.a. costante che assume il solo valore γ.

c) Supponiamo verificate le Ipotesi (A'). Per t fissato, sia R il raggio di una palla di centro l'origine e contenente γ_t per ogni $t \le T$. Siano $\tilde{b}, \tilde{\sigma}$ un campo di vettori e di matrici rispettivamente, lipschitziani e limitati e che coincidono con b, σ rispettivamente per $|x| \le R + 1$. Indichiamo con $\tilde{\xi}^\varepsilon$ la soluzione dell'EDS di coefficienti $\tilde{b}$ e $\varepsilon\tilde{\sigma}$ e con la stessa condizione iniziale $\tilde{\xi}^\varepsilon = x$. Sappiamo allora (Teorema 8.9) che i due processi ξ^ε e $\tilde{\xi}^\varepsilon$ coincidono fino all'uscita dalla palla di raggio $R + 1$. Ne segue che, per $\alpha \le 1$, i due eventi

$$\Big\{\sup_{0\le s\le T} |\xi_t^\varepsilon - \gamma_t| \le \alpha\Big\} \quad \text{e} \quad \Big\{\sup_{0\le s\le T} |\tilde{\xi}_t^\varepsilon - \gamma_t| \le \alpha\Big\}$$

sono q.c. uguali. Dunque

$$\mathrm{P}\Big(\sup_{0\le s\le T} |\xi_t^\varepsilon - \gamma_t| \le \alpha\Big) = \mathrm{P}\Big(\sup_{0\le s\le T} |\tilde{\xi}_t^\varepsilon - \gamma_t| \le \alpha\Big) \le 2\exp\Big[-\frac{1}{\varepsilon^2}\,\frac{\alpha^2 e^{-2\tilde{L}T}}{2T\|\tilde{\sigma}\|_\infty^2}\Big].$$

S8.6 a) Ammettiamo per un istante le relazioni (8.38) e applichiamo la formula di Ito al processo $\xi_t = h(D_t, B_t)$. Poiché $(D_t)_t$ è a variazione finita,

$$dh(D_t, B_t) = h_x(D_t, B_t)D_t'\,dt + h_y(D_t, B_t)\,dB_t + \frac{1}{2}h_{yy}(D_t, B_t)\,dt.$$

Ma

$$\begin{aligned} h_y(D_t, B_t) &= \sigma(h(D_t, B_t)) \\ h_{yy}(D_t, B_t) &= \sigma'(h(D_t, B_t))\sigma(h(D_t, B_t)) \\ h_x(D_t, B_t) &= \exp\Big[\int_0^{B_t} \sigma'(h(D_t, s))\,ds\Big]. \end{aligned}$$

Inoltre

$$D_t' = \Big(-\frac{1}{2}\sigma'(h(D_t, B_t))\sigma(h(D_t, B_t)) + b(h(D_t, B_t))\Big)\exp\Big[-\int_0^{B_t} \sigma'(h(D_t, s))\,ds\Big].$$

Mettendo insieme i pezzi si trova

$$dh(D_t, B_t) = b(h(D_t, B_t))\,dt + \sigma(h(D_t, B_t))\,dB_t$$

che conclude la prova di a).

Restano da verificare le due relazioni del suggerimento. La (8.36) si può scrivere

$$h_y(x, y) = \sigma(h(x, y)), \qquad h(x, y) = x.$$

Poiché ammettiamo che h sia due volte derivabile in y e σ è supposta derivabile,

$$h_{yy}(x, y) = \sigma'(h(x, y))h_y(x, y) = \sigma'(h(x, y))\sigma(h(x, y)).$$

Invece, derivando rispetto a x,

$$h_{yx}(y, x) = \sigma'(h(x, y))h_x(x, y), \qquad h_x(x, 0) = 1$$

ovvero, posto $g(y) = h_x(x, y)$, g è soluzione del problema lineare

$$g'(y) = \sigma'(h(x, y))g(y), \qquad g(0) = 1$$

che ha appunto soluzione

$$g(y) = \exp\Big[\int_0^y \sigma'(h(x, s))\, ds\Big].$$

b) Se indichiamo con $\tilde{f}$ l'analogo della funzione f definita nell'enunciato dell'esercizio con $\tilde{b}$ al posto di b, allora chiaramente $\tilde{f}(x, t, \omega) \ge f(x, t, \omega)$ per ogni x, t. Se $\tilde{D}$ è la soluzione di $\tilde{D}'_t = f(\tilde{D}_t, t, \omega)$, $\tilde{D}_0 = x$, allora $\tilde{D}_t \ge D_t$ per ogni $t \ge 0$. Poiché la funzione h è crescente in entrambi i suoi argomenti (grazie al teorema di confronto per equazioni differenziali ordinarie e poiché σ è strettamente positiva) si ha

$$\tilde{\xi}_t = h(\tilde{D}_t, B_t) \ge h(D_t, B_t) = \xi_t$$

S8.7 La funzione $f(y) = \frac{x}{1-xy}$ è tale che $f(0) = x$ e $f'(y) = f(y)^2$, $f''(y) = 2f(y)^3$. Dunque se si potesse applicare la formula di Ito si avrebbe

$$df(B_t) = f'(B_t)\, dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t)\, dt = f(y)^2\, dB_t + \frac{1}{2} f(y)^3\, dt$$

per cui $\xi_t = f(B_t)$ sarebbe soluzione di (8.39). Ciò non è corretto formalmente perché f non è $C^2(\mathbb{R})$ (non è nemmeno definita dappertutto). Per risolvere questo punto, supponiamo $x > 0$ e sia f_ε una funzione che coincide con f su $]-\infty, \frac{1}{x} - \varepsilon]$ e poi prolungata in maniera da essere $C^2(\mathbb{R})$. Se indichiamo con σ_ε il tempo di passaggio di B per $\frac{1}{x} - \varepsilon$, allora la formula di Ito dà, per $\xi_t = f_\varepsilon(B_t)$,

$$\xi_{t\wedge\sigma_\varepsilon} = x + \int_0^{t\wedge\sigma_\varepsilon} \xi_s^3\, ds + \int_0^{t\wedge\sigma_\varepsilon} \xi_s^2\, dB_s.$$

Dunque $\xi_t = f(B_t)$ è soluzione di (8.39) per ogni $t \le \sigma_\varepsilon$. Mandando $\varepsilon \searrow 0$ è facile vedere che $\sigma_\varepsilon \nearrow \tau_x$ e dunque $(\xi_t)_t$ è soluzione di (8.39) su $[0, \tau_x[$.

S8.8 a) Sia $k^* = \sup_{t\le T} \|G_t G_t^*\|$, dove $\|\ \|$ indica la norma come operatore, in modo che sia $\langle G_t G_t^* \theta, \theta\rangle \le k^*$ per ogni vettore θ di modulo 1. Per la Proposizione 7.15

$$\mathrm{P}\Big(\sup_{0\le t\le T} \Big|\int_0^t G_s\, dB_s\Big| \ge \rho\Big) \le 2m e^{-c_0\rho^2}$$

dove $c_0 = (2Tmk^*)^{-1}$. Se poniamo $A = \big\{\sup_{0\le t\le T} \big|\int_0^t G_s\, dB_s\big| \ge \rho\big\}$, allora su A si ha, per $t \le T$,

$$|X_t| \le |x| + M\int_0^t (1 + |X_s|)\, ds + \rho$$

ovvero

$$X_t^* \le (|x| + MT + \rho) + M\int_0^t X_s^*\, ds$$

e per il Lemma di Gronwall $X_T^* \le (|x| + MT + \rho)\, e^{MT}$. Dunque, se $|x| \le K$,

$$\mathrm{P}\big(X_T^* > (K + MT + \rho)\, e^{MT}\big) \le 2m e^{-c_0\rho^2}.$$

Risolvendo $R = (K + MT + \rho)\, e^{MT}$ si ottiene $\rho = Re^{-MT} - (|x| + MT)$ e dunque

$$\mathrm{P}(X_T^* > R) \le 2m \exp\Big(-c_0\big(Re^{-MT} - (K + MT)\big)^2\Big)$$

da cui si ricava facilmente che per ogni costante $c = c_T$ strettamente più piccola di

$$c_0 e^{-2MT} = \frac{e^{-2MT}}{2Tmk^*} \tag{12.25}$$

vale la disuguaglianza (8.40), per R abbastanza grande.

b) Ovvia conseguenza di a), con $F_t = b(\xi_t, t)$, $G_t = \sigma(\xi_t, t)$.

c) Posto $u(x) = \log(1 + |x|^2)$, calcoliamo con pazienza le derivate:

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= \frac{2x_i}{1 + |x|^2} \\ u_{x_i x_j} &= \frac{2\delta_{ij}}{1 + |x|^2} - \frac{4x_i x_j}{(1 + |x|^2)^2}. \end{aligned} \tag{12.26}$$

In particolare per $|x| \to +\infty$ le derivate prime tendono a 0 almeno come $|x|^{-1}$ e le derivate seconde almeno come $|x|^{-2}$. Per la formula di Ito il processo $Y_t = \log(1 + |\xi_t|^2)$ ha differenziale stocastico

$$\begin{aligned} dY_t = \Big(\sum_{i=1}^m u_{x_i}(\xi_t) b_i(\xi_t, t) + \sum_{i,j,h=1}^m u_{x_i x_j}(\xi_t)\sigma_{ih}(\xi_t, t)\sigma_{jh}(\xi_t, t)\Big)\, dt + \\ + \sum_{i,j=1}^m u_{x_i}(\xi_t)\sigma_{ij}(\xi_t, t)\, dB_j(t). \end{aligned}$$

Dalle (12.26), poiché b e σ sono supposte a crescita sublineare, è chiaro che tutti i termini $u_{x_i}b_i$, $u_{x_ix_j}\sigma_{ih}\sigma_{jh}$, $u_{x_i}\sigma_{ij}$ sono limitati. Possiamo quindi applicare il punto a), che garantisce che per ρ grande si ha

$$\mathrm{P}\Big(\sup_{0\le t\le T}\log(1+|\xi_t|^2)\ge\log\rho\Big)\le \mathrm{e}^{-c(\log\rho)^2}$$

ovvero $\mathrm{P}(\xi_T^*\ge\sqrt{\rho-1})\le \mathrm{e}^{-c(\log\rho)^2}$. Ponendo $R=\sqrt{\rho-1}$, ovvero $\rho=R^2+1$, la disuguaglianza diviene, per R grande,

$$\mathrm{P}(\xi_T^*\ge R)\le \mathrm{e}^{-c(\log(R^2+1))^2}\le \mathrm{e}^{-c(\log R)^2}=\frac{1}{R^{c\log R}}\cdot \tag{12.27}$$

d) Per l'Esercizio 0.3, se $p\ge 1$,

$$\mathrm{E}[(\xi_T^*)^p]=p\int_0^{+\infty}t^{p-1}\mathrm{P}(\xi_T^*\ge t)\,dt.$$

Nelle Ipotesi (A'), per la (12.27), la funzione $t\to\mathrm{P}(\xi_T^*\ge t)$ tende a zero più velocemente di ogni polinomio per $t\to+\infty$ e dunque l'integrale è convergente per ogni $p\ge 0$. Se per di più il coefficiente di diffusione σ è limitato si ha

$$\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\alpha(\xi_T^*)^2}]=1+\int_0^{+\infty}2\alpha t\mathrm{e}^{\alpha t^2}\mathrm{P}(\xi_T^*\ge t)\,dt$$

e ancora, per le (8.40) e (12.25), per $\alpha<\mathrm{e}^{-2MT}(2Tmk^*)^{-1}$, l'integrale è convergente. A maggior ragione $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\alpha\xi_T^*})<+\infty$ per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$.

S8.9 Per l'Esercizio 8.1, il ponte browniano è soluzione dell'EDS

$$d\xi_t=-\frac{\xi_t}{1-t}\,dt+dB_t$$

e con la condizione $\xi_0=0$. Dunque, per la formula di Cameron-Martin, $(B_t)_{t\le T}$ è un ponte browniano rispetto alla probabilità Q definita da $d\mathrm{Q}=Z_T\,d\mathrm{P}$ dove

$$Z_T=\exp\Big(-\int_0^T\frac{B_s}{1-s}\,dB_s-\frac12\int_0^T\frac{B_s^2}{(1-s)^2}\,ds\Big). \tag{12.28}$$

Sappiamo che $dB_s^2=2B_s\,dB_s+ds$. Dunque

$$d\frac{B_s^2}{1-s}=\frac{2B_s}{1-s}\,dB_s+\frac{1}{1-s}\,ds+\frac{B_s^2}{(1-s)^2}\,ds$$

da cui

$$\int_0^T\frac{B_s}{1-s}\,dB_s=\frac12\frac{B_s^2}{1-s}\Big|_0^T+\frac12\log(1-T)-\frac12\int_0^T\frac{B_s^2}{(1-s)^2}\,ds.$$

Sostituendo nella (12.28) si ha

$$Z_T=\exp\Big(-\frac12\log(1-T)-\frac{B_T^2}{2(1-T)}\Big)$$

cioè la tesi.

S8.10 a) Per mostrare che $\mathrm{E}(Z_T)=1$, grazie alla Proposizione 7.23 b), basta provare che $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mu\theta^2|X_s|^2})<+\infty$ per qualche $\mu>0$ per ogni $s\le t$. Se $X_s=(X_1(s),\dots,X_m(s))$, allora, poiché le componenti di X sono indipendenti, si ha

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mu\theta^2|X_s|^2})=\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mu\theta^2X_1(s)^2})\dots\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mu\theta^2X_m(s)^2})=\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mu\theta^2X_1(s)^2})^m=\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mu s\theta^2W^2})^m,$$

dove $W\sim N(0,1)$. Questa quantità, grazie all'Esercizio 0.12, è finita per ogni $s\le t$ se $\mu<(2\theta^2t)^{-1}$.

b) Per il Teorema 7.22 di Girsanov, rispetto a Q il processo

$$W_s=X_s-\theta\int_0^s X_u\,du$$

è un moto browniano (m dimensionale), per $s\le t$. Dunque, per $s\le t$, X è soluzione di

$$dX_s=\theta X_s\,ds+dW_s$$

ed è dunque un processo di Ornstein-Uhlenbeck. Poiché $X_0=W_0=0$, come abbiamo visto nel paragrafo 8.2, si ha

$$X_t=\int_0^t\mathrm{e}^{\theta(t-s)}\,dW_s.$$

e X è un processo gaussiano; $\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}(X_t)=0$ e, per la Proposizione 7.12, la matrice di covarianza di X_t rispetto a Q è uguale alla matrice identità moltiplicata per

$$\int_0^t\mathrm{e}^{2\theta(t-s)}\,ds=\int_0^t\mathrm{e}^{2\theta u}\,du=\frac{1}{2\theta}(\mathrm{e}^{2\theta t}-1). \tag{12.29}$$

c) Intanto, per la formula di Ito, rispetto a P si ha $d|X_t|^2=2X_s\,dX_s+m\,dt$, ovvero

$$\int_0^t X_s\,dX_s=\frac12(|X_t|^2-mt).$$

Dunque, per $\lambda = -\frac{\theta^2}{2}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{2}(|X_t|^2-mt)}] &= \mathrm{E}[Z_t \mathrm{e}^{-\frac{\theta}{2}(|X_t|^2-mt)}] = \\
&= \mathrm{E}\Big[\exp\Big(\theta\int_0^t X_s\,dX_s - \frac{\theta^2}{2}\int_0^t |X_s|^2\,ds - \frac{\theta}{2}(|X_t|^2-mt)\Big)\Big] = \\
&= \mathrm{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\theta^2}{2}\int_0^t |X_s|^2\,ds\Big)\Big] = J_\lambda.
\end{aligned}$$

Poiché le componenti di X sono indipendenti rispetto a Q, grazie a b),

$$\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{2}(|X_t|^2-mt)}] = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}m\theta t}\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{2}X_1(t)^2}]^m.$$

Rispetto a Q, $X_1(t)$ ha varianza data dalla (12.29); quindi, ricordando l'Esercizio 0.12,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{2}X_1(t)^2}] &= \big(1+\theta\,\mathrm{Var}_{\mathrm{Q}}(X_1(t))\big)^{-1/2} = \big(1+\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\theta t}-1)\big)^{-1/2} = \\
&= \big(\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\theta t}+1)\big)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Mettendo insieme i pezzi si ottiene

$$J_\lambda = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}m\theta t}\Big(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\theta t}+1)\Big)^{-m/2} = \Big(\frac{\mathrm{e}^{2\theta t}+1}{2\mathrm{e}^{\theta t}}\Big)^{-m/2} = \cosh(\theta t)^{-m/2}.$$

d) Per λ negativo, la trasformata di Laplace della v.a. $\int_0^t |X_s|^2\,ds$ vale dunque $\cosh(\sqrt{-2\lambda}\,t)^{-m/2}$. Ricordando che la trasformata di Laplace è una funzione analitica (vedi il paragrafo 11.1), per $\lambda \ge 0$, essa varrà $\cosh(i\sqrt{2\lambda}\,t)^{-m/2} = \cos(\sqrt{2\lambda}\,t)^{-m/2}$, fino all'ascissa di convergenza. Tenendo conto che il primo zero positivo del coseno è $\frac{\pi}{2}$, l'ascissa di convergenza è $\frac{\pi^2}{8t}$. In conclusione

$$J = \begin{cases} \cos(\sqrt{2\lambda}\,t)^{-m/2} & \text{se } \lambda < \frac{\pi^2}{8t} \\ +\infty & \text{se } \lambda > \frac{\pi^2}{8t}. \end{cases}$$

S8.11 a) Per il Teorema di Girsanov, $B_t = X_t - \int_0^t b(X_s+x)\,ds$ è un moto browniano per $t \le T$ rispetto alla probabilità Q definita da $d\mathrm{Q} = Z\,d\mathrm{P}$, dove

$$Z = \exp\Big(\int_0^T b(X_s+x)\,dX_s - \frac{1}{2}\int_0^T b^2(X_s+x)\,ds\Big).$$

Ma se U è una primitiva di b, allora per la formula di Ito

$$dU(X_t+x) = b(X_t+x)\,dX_t + \tfrac{1}{2}b'(X_t+x)\,dt$$

per cui

$$\int_0^T b(X_s+x)\,dX_s = U(X_T+x) - U(x) - \frac{1}{2}\int_0^T b'(X_s+x)\,ds$$

per cui Z è data dalla (8.41). Rispetto a Q dunque $(X_t)_{t\le T}$ è soluzione di

$$X_t = \int_0^t b(X_s+x)\,ds + B_t$$

e $Y_t = X_t + x$ è soluzione di

$$Y_t = x + \int_0^T b(X_s+x)\,ds + B_t = x + \int_0^T b(Y_s)\,ds + B_t.$$

b) Calcoliamo la trasformata di Laplace della legge di Y_t con la condizione iniziale $Y_0 = x$. Poiché questa coincide con quella di $X_t + x$ rispetto a Q, si tratta di calcolare

$$\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}[\mathrm{e}^{\theta(X_t+x)}] = \mathrm{E}[Z\mathrm{e}^{\theta(X_t+x)}]$$

Se $b(z) = k\tanh(kz+c)$, allora, poichè

$$\begin{aligned}
\tanh^2(z) &= \frac{\sinh^2(z)}{\cosh^2(z)} = 1 - \frac{1}{\cosh^2(z)} \\
\tanh'(z) &= \frac{1}{\cosh^2(z)},
\end{aligned}$$

si ha $b' + b^2 = k^2$. Inoltre una primitiva di b è $U(z) = \log\cosh(kz+c)$. Dunque

$$Z = \frac{\cosh(kX_T+kx+c)}{\cosh(kx+c)}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k^2T}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z\mathrm{e}^{\theta(X_t+x)}) &= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k^2T}}{\cosh(kx+c)}\,\mathrm{E}\big[\cosh(kX_T+kx+c)\,\mathrm{e}^{\theta(X_t+x)}\big] = \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k^2T}\mathrm{e}^{\theta x}}{2\cosh(kx+c)}\,\mathrm{E}\big[\mathrm{e}^{(\theta+k)X_t+kx+c}\,\mathrm{e}^{k(X_T-X_t)} + \mathrm{e}^{(\theta-k)X_t-kx-c}\,\mathrm{e}^{-k(X_T-X_t)}\big]
\end{aligned}$$

Poiché rispetto a P $X_t \sim N(0,t)$ e X_t e $X_T - X_t$ sono indipendenti,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z\mathrm{e}^{\theta(X_t+x)}) &= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k^2T}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}k^2(T-t)}}{2\cosh(kx+c)}\mathrm{e}^{\theta x}\big(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\theta+k)^2t}\mathrm{e}^{kx+c} + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\theta-k)^2t}\mathrm{e}^{-kx-c}\big) = \\
&= \frac{1}{2\cosh(kx+c)}\big(\underbrace{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2t}\mathrm{e}^{\theta(kt+x)}}_{\hat\mu_1(\theta)}\mathrm{e}^{kx+c} + \underbrace{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2t}\mathrm{e}^{\theta(-kt+x)}}_{\hat\mu_2(\theta)}\mathrm{e}^{-kx-c}\big)
\end{aligned}$$

dove riconosciamo che $\hat{\mu}_1$ e $\hat{\mu}_2$ sono rispettivamente le trasformate di Laplace di una legge $N(kt+x,t)$ e di una $N(-kt+x,t)$. La legge di Y_t è dunque una mistura di queste due leggi con pesi (indipendenti da t)

$$\alpha = \frac{e^{kx+c}}{e^{kx+c}+e^{-kx-c}}, \qquad 1-\alpha = \frac{e^{-kx-c}}{e^{kx+c}+e^{-kx-c}}$$

S9.1 Siano $X = (\mathscr{C}, \mathscr{M}, (\mathscr{M}_t)_t, (X_t)_t, (P^x)_x)$ la diffusione canonica associata a L e τ il tempo d'uscita da D

a) Per la (9.3) si ha, per $x \in D$,

$$u(x) = E^x[u(X_\tau)Z_\tau] - E^x\Big(\int_0^\tau f(X_s)Z_s\,ds\Big)$$

dove $Z_t = e^{-\int_0^t c(X_s)\,ds}$. Poiché $Z_t \le 1$ per ogni t, $f \ge 0$ e $X_\tau \in \partial D$ P^x-q.c.,

$$u(x) \le E^x[u(X_\tau)] \le \max_{\partial D} u.$$

b) Immediato per la (9.4); infatti, per ogni $x \in D$, $u(x) = E^x[u(X_\tau)]$ e, poiché X_τ prende valori in ∂D P^x-q.c.,

$$\min_{\partial D} u \le u(X_\tau) \le \max_{\partial D} u, \qquad P^x\text{-q.c}$$

S9.2 a) Basta applicare la formula di rappresentazione (9.3), ricordando che qui $\phi \equiv 0$, $Z_t \equiv 1$ e $f \equiv -1$.

b) Se $m = 1$ la (9.31) diviene

$$\begin{cases} \frac{1}{2}u'' = -1 & \text{su }]-1,1[\\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzione $u(x) = 1-x^2$. Dunque $E(\tau) = u(0) = 1$. Se $m \ge 2$, come indicato nel suggerimento, se cerchiamo una soluzione della forma $u(x) = g(|x|)$, si vede che

$$\frac{1}{2}\Delta u(x) = \frac{1}{2}g''(|x|) + \frac{m-1}{2|x|}g'(|x|).$$

Si tratta dunque di risolvere l'equazione

$$\frac{1}{2}g''(y) + \frac{m-1}{2y}g'(y) = -1 \tag{12.30}$$

con la condizione $g(1) = 0$ (più un'altra che vedremo). Ponendo $v = g'$, siamo condotti all'equazione

$$\frac{1}{2}v'(y) + \frac{m-1}{2y}v(y) = -1. \tag{12.31}$$

Separando le variabili, l'equazione omogenea è

$$\frac{v'(y)}{v(y)} = -\frac{m-1}{y}$$

e cioè $v(y) = c_1 y^{-m+1}$. Con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, cerchiamo una soluzione di (12.31) della forma $c(y)y^{-m+1}$ e si vede subito che deve essere

$$c'(y)y^{-m+1} = -2$$

e dunque $c(y) = -\frac{2}{m}y^m$. In conclusione l'integrale della (12.31) è $v(y) = c_1 y^{-m+1} - \frac{2}{m}y$. Calcoliamone la primitiva; se $m \ge 3$ l'integrale generale della (12.30) è

$$g(y) = c_1 y^{-m+2} - \frac{1}{m}y^2 + c_2.$$

La condizione $g(1) = 0$ dà $c_1 + c_2 = \frac{1}{m}$. Occorre però anche che g *sia definita in* 0, cioè deve essere $c_1 = 0$. In conclusione la soluzione di (9.31) è

$$u(x) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m}|x|^2$$

e dunque $u(0) = \frac{1}{m}$. Se $m = 2$ il calcolo della primitiva di v è diverso e l'integrale generale della (12.30) è

$$g(y) = c_1 \log y - \frac{1}{m}y^2 + c_2$$

ma il resto del ragionamento è lo stesso.

S9.3 La prima parte dell'enunciato è una conseguenza delle Proposizioni 9.1 e 9.2. Per calcolare $P^x(X_\tau = 1)$, due possibilità: la prima consiste nell'osservare che $u(x) = P^x(X_\tau = 1)$ è soluzione di

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a(x)u''(x) = 0 & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0,\ u(1) = 1 \end{cases}$$

(è la formula di rappresentazione (9.3), con $c \equiv 0$, $f \equiv 0$, $\phi(0) = 0, \phi(1) = 1$). La soluzione è molto semplice perché, dato che $a(x) > 0$ per ogni x, l'equazione diviene $u'' = 0$ e si risolve immediatamente. Ciò mostra già che $P^x(X_\tau = 1)$ non dipende da a.

Alternativamente si sarebbe potuto osservare che la diffusione X si può ottenere risolvendo l'EDS $dX_t = \sigma(X_t)\,dB_t$, dove σ è il campo di matrici lipschitziano che è radice quadrata di a. Dunque

$$X_{t\wedge\tau} = x + \int_0^{t\wedge\tau} \sigma(X_s)\,dB_s.$$

L'integrale stocastico a destra è una martingala, poiché σ è limitata su $[0, 1]$. Dunque $E^x(X_{t\wedge\tau}) = x$. Poiché $|X_{t\wedge\tau}| < 1$, si può applicare il Teorema di Lebesgue e passare al limite per $t \to +\infty$, il che dà $x = E^x(X_\tau)$. Poiché X_τ può prendere solo i valori 0 o 1,

$$x = P^x(X_\tau = 1).$$

S9.4 a) Segue dalle Proposizioni 9.1 e 9.2 (è soddisfatta la condizione B_3).

b) Poniamo $v(x) = x^{1-2\delta}$. Si verifica subito che

$$\frac{1}{2}v''(x) + \frac{\delta}{x}\,v'(x) = 0$$

per ogni $x > 0$. Dunque, se chiamiamo $u(x)$ il termine a destra nella (9.32), u è soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}u''(x) + \frac{\delta}{x}\,u'(x) = 0 & x \in]a, b[\\ u(a) = 0, u(b) = 1 \end{cases}$$

Dunque, per la (9.4), $u(x) = P^x(X_\tau = b)$.

c) Grazie all'Esercizio 7.11, sappiamo che il processo $X_t = |B_t + x|$ è soluzione di

$$dX_t = \frac{m-1}{2X_t}\,dt + dW_t$$

dove W è un moto browniano reale, con la condizione $X_0 = |x| = \xi$. Dunque, indicando con P^ξ la legge di X,

$$P^x(|B_\sigma| = b) = P^\xi(X_\tau = b) = \frac{x^\lambda - a^\lambda}{b^\lambda - a^\lambda}\Big(\frac{b}{x}\Big)^\lambda$$

dove $\lambda = 2\delta - 1 = m - 2$. Per $m \to \infty$ questa probabilità converge a 1.

S9.5 Per la (9.3),

$$u^\varepsilon(z) = E[\phi(\xi^\varepsilon(\tau))]$$

dove ξ^ε è la diffusione associata all'operatore L^ε di (9.33) e con la condizione iniziale $\xi_0^\varepsilon = z$, $z \in D$. Evidentemente, se $z = (x, y)$,

$$d\xi^\varepsilon(t) = (x + t + \varepsilon B_1(t), y + \varepsilon B_2(t)).$$

Se indichiamo con γ la traiettoria, a valori $\mathbb{R}^2$, $\gamma_t = (x+t, y)$ si vede, direttamente oppure usando l'Esercizio 8.5, che la legge di ξ^ε si concentra, per $\varepsilon \searrow 0$, sulla traiettoria γ; dunque, $E(\phi(\xi^\varepsilon(\tau))$ dovrebbe convergere a $\phi(\gamma_{\tau_\gamma})$ (per $w \in \mathscr{C}$ indichiamo con τ_w il primo istante in cui la traiettoria w esce da D). È facile inoltre verificare che $\gamma_{\tau_\gamma} = (\sqrt{1-y^2}, y)$. Dunque si dovrebbe avere $u^\varepsilon(z) \to u_0(z) = \phi(\sqrt{1-y^2}, y)$. In particolare il valore del limite u_0 dipende dal dato al bordo solo sulla metà di destra della circonferenza. Vediamo ora come rendere rigorosa questa argomentazione.

Intanto osserviamo che il tempo in cui la traiettoria γ esce da D è $t_\gamma = \sqrt{1-y^2} - x$. Fissiamo $T = \sqrt{1-y^2} - x + 1$. Per $\delta > 0$ poniamo $A_\delta = \{w;\ w \in \mathscr{C}, \sup_{t\le T}|w_t - \gamma_t| < \delta\}$. Grazie all'Esercizio 8.5, o anche direttamente, si vede che

$$P(\xi^\varepsilon \in A_\delta^c) = P\Big(\sup_{t\le T}|B_t| \ge \tfrac{\delta}{\varepsilon}\Big) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$$

e dunque

$$E(\phi(\xi_\tau^\varepsilon)1_{\{\xi^\varepsilon\in A_\delta^c\}}) \le \|\phi\|_\infty P(\xi^\varepsilon \in A_\delta^c) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0.$$

D'altra parte, per $\eta > 0$ fissato, esiste $\delta_1 > 0$ tale che $|\phi(z) - \phi(\gamma_\tau)| < \eta$ se $|z - \gamma_\tau| < \delta_1$. Inoltre esiste $\delta_2 > 0$ tale che, se $\sup_{t\le T}|w_t - \gamma_t| < \delta_2$, allora $|w_{\tau_w} - \gamma_{\tau_\gamma}| \le \delta_1$. Preciseremo poi questo fatto intuitivo. Con la scelta di $\delta = \delta_2$ si ha allora

$$\begin{aligned} |E[\phi(\xi_\tau^\varepsilon)] - \phi(\gamma_{\tau_\gamma})| &\le E[|\phi(\xi_\tau^\varepsilon) - \phi(\gamma_{\tau_\gamma})|] \le \\ &\le E[|\phi(\xi_\tau^\varepsilon) - \phi(\gamma_{\tau_\gamma})|1_{\{\xi^\varepsilon\in A_\delta^c\}}] + E[|\phi(\xi_\tau^\varepsilon) - \phi(\gamma_{\tau_\gamma})|1_{\{\xi^\varepsilon\in A_\delta\}}] \le \\ &\le \underbrace{E[|\phi(\xi_\tau^\varepsilon) - \phi(\gamma_{\tau_\gamma})|1_{\{\xi^\varepsilon\in A_\delta^c\}}]}_{\to 0} + \eta \end{aligned}$$

e, per l'arbitrarietà di η si può concludere.

Mostriamo che esiste $\delta_2 > 0$ tale che se $\sup_{t\le T}|w_t - \gamma_t| < \delta_2$ allora $|w_{\tau_w} - \gamma_{\tau_\gamma}| \le \delta_1$. Sia $\delta_0 > 0$, allora esiste un numero $\alpha = \alpha_\delta > 0$ tale che $dist(\gamma_s, \partial D) > \alpha$ per $s \le \tau_\gamma - \delta_0$ e per $s \ge \tau_\gamma + \delta_0$; si può comunque scegliere $\alpha \le \frac{1}{2}\delta_1$. Se $\sup_{t\le T}|w_t - \gamma_t| < \alpha$, allora intanto $w_s \in D$ per $s \le \tau_\gamma - \delta_0$ e $w_s \in D^c$ per $s \ge \tau_\gamma + \delta_0$. Deve dunque essere $\tau_\gamma - \delta_0 \le \tau_w \le \tau_\gamma + \delta_0$. Inoltre

$$|w_{\tau_w} - \gamma_{\tau_\gamma}| \le |w_{\tau_w} - \gamma_{\tau_w}| + |\gamma_{\tau_w} - \gamma_{\tau_\gamma}| \le \alpha + \delta_0$$

e, Basta ora scegliere $\delta_0 = \frac{1}{2}\delta_1$.

S9.6 La legge d'uscita dalla circonferenza di raggio 1, per un moto browniano con punto iniziale in x ha densità (vedi Esempio 9.4)

$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi}\frac{1 - |x|^2}{|x - y|^2}$$

rispetto alla misura 1-dimensionale normalizzata del cerchio. In questo caso $|x| = \frac{1}{2}$ e, in coordinate angolari, siamo condotti al calcolo dell'integrale

$$\frac{3}{4}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{|x - y(\theta)|^2}\,d\theta,$$

dove $y(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Dunque $|x - y(\theta)|^2 = (\frac{1}{2} - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = \frac{5}{4} - \cos\theta$. L'integrale si calcola con il solito cambio di variabile

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}, \qquad d\theta = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

e dunque

$$\dots = \frac{3}{8\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\frac{5}{4} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\,dt = \frac{3}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+9t^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(3t)\Big|_{-1}^{1} =$$
$$= \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} 3 \simeq 0.795.$$

S9.7 a) Per $\varepsilon > 0$ fissato, indichiamo ancora con u una funzione $C^2(\mathbb{R}^m)$, che coincida con u su D_ε. Allora, per la formula di Ito,

$$dM_t = \theta e^{\theta t} u(X_t)\,dt + e^{\theta t} u'(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2} e^{\theta t} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X_t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(X_t)\,dt =$$
$$= e^{\theta t}\big(\theta u(X_t) + Lu(X_t)\big)\,dt + e^{\theta t} u'(X_t)\,\sigma(X_t)\,dB_t$$

Poiché $M_0 = u(x)$ P^x-q.c. e $\theta u(X_t) + Lu(X_t) = 0$ per $t \le \tau_\varepsilon$,

$$M_{t\wedge\tau_\varepsilon} = u(x) + \int_0^{t\wedge\tau_\varepsilon} e^{\theta s} u'(X_s)\,\sigma(X_s)\,dB_s, \qquad P^x\text{-q.c.}$$

Si tratta di una martingala di quadrato integrabile, poiché u' e σ sono limitate su D_ε.

b) Dalla relazione

$$E^x[e^{\theta(t\wedge\tau_\varepsilon)} u(X_{t\wedge\tau_\varepsilon})] = E^x(M_{t\wedge\tau_\varepsilon}) = E^x(M_0) = u(x),$$

passando al limite prima per $t \to +\infty$ e poi per $\varepsilon \searrow 0$, usando due volte il Lemma di Fatou (ricordiamo che supponiamo $u \ge 0$), si ha

$$E^x(e^{\theta\tau}) = E^x[e^{\theta\tau} u(X_\tau)] \le u(x).$$

Dunque la v.a. $e^{\theta\tau}$ è P^x-integrabile. Le v.a. $e^{\theta(t\wedge\tau_\varepsilon)} u(X_{t\wedge\tau_\varepsilon})$ sono dunque positive e maggiorate da $e^{\theta\tau} \max_{x\in\bar D} u(x)$. Di nuovo passando al limite per $t \to +\infty$ e poi per $\varepsilon \searrow 0$ e usando ora il Teorema di Lebesgue si trova $E^x(e^{\theta\tau}) = u(x)$.

c) L'integrale generale di $\frac{1}{2}u'' + \theta u = 0$ è

$$u(x) = c_1 \cos(\sqrt{2\theta}\,x) + c_2 \sin(\sqrt{2\theta}\,x).$$

Imponendo le condizioni $u(r) = u(-r) = 1$, si trova $c_1 = \cos(\sqrt{2\theta}\,r)^{-1}$, $c_2 = 0$. Dunque la soluzione di (9.34) è

$$u(x) = \frac{\cos(\sqrt{2\theta}\,x)}{\cos(\sqrt{2\theta}\,r)}.$$

Poiché $\cos y > 0$ per $|y| < \frac{\pi}{2}$, una soluzione ≥ 0 esiste se e solo se $\sqrt{2\theta}\,r < \frac{\pi}{2}$, ovvero $\theta < \frac{\pi^2}{8r^2}$. La v.a. τ ha quindi trasformata di Laplace finita per questi valori di θ. Dato che $E^x(e^{\theta\tau}) \nearrow +\infty$ per $\theta \nearrow \frac{\pi^2}{8r^2}$, quest'ultima è l'ascissa di convergenza. In particolare τ *non* ha trasformata di Laplace finita per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ e quindi non può essere limitata P^x-q.c. La media di τ si trova calcolando la derivata in 0 della trasformata di Laplace. Poiché

$$\frac{d}{d\theta} \frac{\cos(\sqrt{2\theta}\,x)}{\cos(\sqrt{2\theta}\,r)} =$$
$$= \frac{1}{\cos^2(\sqrt{2\theta}\,r)}\Big(-\cos(\sqrt{2\theta}\,r)\sin(\sqrt{2\theta}\,x)\frac{x}{\sqrt{2\theta}} + \sin(\sqrt{2\theta}\,r)\cos(\sqrt{2\theta}\,x)\frac{r}{\sqrt{2\theta}}\Big)$$

si ottiene, per $\theta = 0$, $E^x(\tau_r) = r^2 - x^2$ (la media del tempo d'uscita era già stata calcolata nell'Esercizio 9.2). Per la disuguaglianza di Markov, per ogni $\beta > 0$,

$$P^x(\tau > R) \le P^x(e^{\beta\tau} > e^{\beta R}) \le e^{-\beta R} E^x(e^{\beta\tau}).$$

Questa relazione dà una stima della coda della distribuzione di τ per ogni $\beta < \frac{\pi^2}{8r^2}$.

S9.8 a) Sia $B = (\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_t, (B_t)_t, P)$ un moto browniano. Per ogni boreliano $A \subset \mathscr{C}$, si ha $P(B \in A) = P^W(A)$. Ma $P^W(\mathscr{C}_0) = P(B_0 = 0) = 1$.

b) Se A è un aperto contenente la traiettoria 0, allora esso contiene un intorno di 0 della forma $U = \{w; \sup_{0\le t\le T} |w(t)| < \eta\}$; basta mostrare che $P^W(U) > 0$. Ma

$$P^W(U) = P\Big(\sup_{0\le t\le T} |B_t| < \eta\Big) \ge \prod_{i=1}^{m} P\Big(\sup_{0\le t\le T} |B_i(t)| < \frac{\eta}{\sqrt{m}}\Big).$$

Poiché

$$P\Big(\sup_{0\le t\le T} |B_i(t)| < \frac{\eta}{\sqrt{m}}\Big) = P(\tau_{\eta/\sqrt{m}} > T) > 0$$

si ottiene $P^W(U) > 0$.

c) Rinviamo a più tardi la prova del fatto che le traiettorie della forma $\gamma_t = \int_0^t \Phi_s\,ds$, $\Phi \in L^2$, sono dense in $\mathscr{C}_0$. Se $A \subset \mathscr{C}_0$ è un aperto (per la topologia indotta da $\mathscr{C}$), allora esso contiene una traiettoria γ di questo tipo e $\tilde A = A - \gamma$ è un aperto contenente l'origine. Sia $V = \{w; \sup_{0\le t\le T} |w(t)| < \eta\}$ un intorno dell'origine contenuto in $\tilde A$. Sia ha

$$P(B \in A) = P(B - \gamma \in \tilde A) \ge P(B - \gamma \in V).$$

Se poniamo

$$Z = \exp\Big(-\int_0^T \gamma'_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T |\gamma'_s|^2\, ds\Big),$$

e se Q è la probabilità definita da $dQ = Z\, dP$, allora per il Teorema 7.22 di Girsanov, per $t \le T$ il processo $W_t = B_t + \gamma_t$ è un moto browniano. Dunque $B_t = W_t - \gamma_t$ ha rispetto a Q la stessa legge di $B_t - \gamma_t$ rispetto a P, per $t \le T$. Dunque

$$P(B - \gamma \in V) = Q(B \in V) = E(1_{\{B \in V\}} Z).$$

Basta ora osservare che $Z > 0$ P-q.c. e che, grazie a b), $P(B \in V) > 0$. Ne segue che $E(1_{\{B\in V\}}Z) > 0$.

Vediamo sommariamente perché le traiettorie della forma sopradescritta sono dense in $\mathscr{C}_0$. Si tratta di un risultato classico: queste traiettorie costituiscono anzi uno spazio di Hilbert $\mathscr{H}_1$, denso in $\mathscr{C}_0$. Intanto osserviamo che appartengono a $\mathscr{H}_1$ le traiettorie lineari a tratti e costanti a partire da un certo istante $T > 0$. Inoltre sia $\zeta \in \mathscr{C}_0$ e fissiamo $\eta > 0, T > 0$. Si tratta di provare che esiste una traiettoria $\gamma \in \mathscr{H}_1$ tale che $\{\sup_{t\le T} |\zeta_t - \gamma_t| \le \eta\}$. Dato che, ristretta a $[0, T]$, ζ è uniformemente continua, sia $\delta > 0$ tale che se $|t-s| \le \delta$ allora $|\zeta_t - \zeta_s| \le \frac{\eta}{2}$. Siano $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ dei tempi tali che $|t_i - t_{i-1}| \le \delta$, $i = 1, \dots, n$ e γ la traiettoria lineare a tratti che coincide con ζ agli istanti t_i ed è lineare tra gli istanti t_{i-1}, t_i, $i = i = 1, \dots, n$; allora $\sup_{t\le T} |\zeta_t - \gamma_t| \le \eta$. Infatti, se $t_i \le t < t_{i+1}$, poiché $\gamma_{t_i} = \zeta_{t_i}$,

$$|\gamma_t - \zeta_t| \le |\gamma_t - \gamma_{t_i}| + |\zeta_t - \zeta_{t_i}|.$$

Ora $|\zeta_t - \zeta_{t_i}| \le \frac{\eta}{2}$, mentre, poiché

$$\gamma_t = \gamma_{t_i} + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}(\gamma_{t_{i+1}} - \gamma_{t_i}),$$

$|\gamma_t - \gamma_{t_i}| \le |\gamma_{t_{i+1}} - \gamma_{t_i}| = |\zeta_{t_{i+1}} - \zeta_{t_i}| \le \frac{\eta}{2}$.

S9.9 La EDS associata a L è

$$d\xi_t = b\xi_t\, dt + \sigma \xi_t\, dB_t, \tag{12.32}$$

dove $\sigma = \sqrt{a}$. Poiché le Ipotesi (A) sono soddisfatte, sappiamo che la soluzione fondamentale è data dalla densità della funzione di transizione, se questa esiste. A questo scopo non si può applicare il Teorema 9.12, le cui ipotesi non sono soddisfatte dato che i coefficienti non sono limitati. Però sappiamo che la soluzione di (12.32) con la condizione iniziale $\xi_0 = x$ è

$$\xi_t^x = x \exp\big[(b - \tfrac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\big].$$

(vedi il paragrafo 8.2). Si tratta di una diffusione omogenea nel tempo e la funzione di transizione $p(t, x, \cdot)$ è la legge della v.a. ξ_t^x. La v.a. $\exp\big[(b - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\big]$ ha legge lognormale di parametri $(b - \frac{\sigma^2}{2})t$ e $\sigma^2 t$ (vedi Esercizio 0.11) ed ha dunque densità

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\sigma y} \exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2 t}\big(\log y - (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})t\big)^2\Big).$$

La funzione di transizione $p(t, x, \cdot)$ ha dunque densità

$$q(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\sigma y} \exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2 t}\big(\log \tfrac{y}{x} - (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})t\big)^2\Big)$$

e la soluzione fondamentale è $\Gamma(s, t, x, y) = q(t - s, x, y)$.

S9.10 a) Per la formula di Ito

$$d|B_t^{(n)}|^2 = 2\sum_{i=i}^n B_i(t)\, dB_i(t) + n\, dt.$$

Dunque, poiché

$$dM_n(t) = 2\sum_{i=i}^n B_i(t)\, dB_i(t),$$

M_n è una martingala di quadrato integrabile. Per il teorema d'arresto, per ogni $t > 0$, $E[M_n(t \wedge \tau_n)] = E[M_n(0)] = 0$ e dunque

$$E(|B^{(n)}_{t\wedge\tau_n}|^2) = nE(t \wedge \tau_n).$$

Mandiamo $t \to +\infty$ e passiamo al limite (a sinistra con il Teorema di Lebesgue perché $|B^{(n)}_{t\wedge\tau_n}|^2 \le n$, a destra con quello di Beppo Levi). Poiché $|B^{(n)}_{\tau_n}|^2 = n$, si ottiene $nE(\tau_n) = n$, cioè il risultato voluto.

b) Per la formula di Ito

$$dR_n(t) = dt + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n B_i(t)\, dB_i(t) = dt + \frac{2}{n}|B_t^{(n)}| \sum_{i=1}^n \frac{B_i(t)}{|B_t^{(n)}|}\, dB_i(t). \tag{12.33}$$

Poniamo

$$W_t = \int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{B_i(s)}{|B_s^{(n)}|}\, dB_i(s).$$

Poiché

$$A(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{B_i(s)^2}{|B_s^{(n)}|^2}\, dt = t,$$

il Teorema 7.16 afferma che W è un moto browniano e sostituendo nella (12.33) si ottiene la (9.35).

c) Si ha, grazie a b),

$$R_n(t \wedge \tau_n) - t \wedge \tau_n = \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^{t\wedge\tau_n} \sqrt{R_n(s)}\, dW_s.$$

Poiché $\sqrt{R_n(s)} \le 1$ per $s \le \tau_n$, $Z_t = R_n(t \wedge \tau_n) - t \wedge \tau_n$ è una martingala di quadrato integrabile. Per la disuguaglianza di Doob,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Big[\sup_{0\le t\le\tau_n} |R_n(t) - t|^2\Big] &= \mathrm{E}\Big(\sup_{t\ge 0} Z_t^2\Big) \le 4 \sup_{t\ge 0} \mathrm{E}(Z_t^2) = \\ &= \frac{16}{n}\mathrm{E}\Big[\int_0^{\tau_n} R_n(s)\, ds\Big] \le \frac{16}{n}\mathrm{E}(\tau_n) = \frac{16}{n}\cdot \end{aligned}$$

In particolare, $\mathrm{E}(|R_n(\tau_n) - \tau_n|^2) \le \frac{16}{n}$ e, per la disuguaglianza di Markov,

$$\mathrm{P}(|R_n(\tau_n) - \tau_n)| \ge \varepsilon) \le \frac{16}{n\varepsilon^2}\cdot$$

Poiché $R_n(\tau_n) = 1$, ciò dimostra che $\tau_n \to 1$ in probabilità per $n \to \infty$.

d) $\pi_{n,d}(\sigma_n)$ è la legge di $X_n = (B_1(\tau_n), \dots, B_d(\tau_n))$, come indicato nel suggerimento. Poiché $\tau_n \to 1$ per $n \to \infty$ in probabilità, da ogni sottosuccessione di $(\tau_n)_n$ si può estrarre una ulteriore sottosuccessione convergente a 1 q.c. Da ciò si ricava facilmente che da ogni sottosuccessione di $(X_n)_n$ si può estrarre una sottosuccessione convergente a $X = (B_1(1), \dots, B_d(1))$ q.c. Quindi $X_n \to N(0, I)$ in legge per $n \to \infty$.

S9.11 a) Poniamo $\tau' = \inf\{t; t > 0, X_t \notin D\}$. Si tratta di dimostrare che, se ∂D ha una barriera locale per L in x, allora $\mathrm{P}^x(\tau' = 0) = 1$. Continuiamo a indicare con w una funzione $C^2(\mathbb{R}^m)$ limitata e che coincida con w in un intorno di x, che continueremo a indicare W. Poniamo $\sigma = \tau_W \wedge \tau'$, dove τ_W è il tempo d'uscita da W. Poiché $w(x) = 0$, la formula di Ito dà, per $t > 0$,

$$w(X_{t\wedge\sigma}) = \int_0^{t\wedge\sigma} Lw(X_s)\, ds + \int_0^{t\wedge\sigma} w'_x(X_s)\, dB_s \qquad \mathrm{P}^x\text{-q.c.}$$

L'integrale stocastico ha media nulla, poiché il gradiente w'_x è limitato in W. Quindi

$$\mathrm{E}^x[w(X_{t\wedge\sigma})] = \mathrm{E}^x\Big(\int_0^{t\wedge\sigma} Lw(X_s)\, ds\Big) \le -\mathrm{E}^x(t \wedge \sigma).$$

Poiché il termine di sinistra è ≥ 0, deve essere $\mathrm{E}^x(t \wedge \sigma) = 0$, ovvero $\sigma = 0$ P^x-q.c. Poiché $\tau_W > 0$ P^x-q.c. per la continuità delle traiettorie, deve dunque essere $\tau' = 0$ P^x-q.c. e dunque x è regolare per la diffusione X.

b) Cerchiamo una barriera della forma $w(y) = k[|x - z|^{-p} - |y - z|^{-p}]$ dove k, p sono numeri > 0 che preciseremo poi. Intanto è chiaro che $w(x) = 0$ e $w > 0$ su D, poiché $S \subset D^c$ e dunque, per $y \in D$, $|y - z|$ è più grande del raggio della sfera, che è uguale a $|x - z|$. Calcoliamo le derivate di w.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y_i}(y) &= kp|y - z|^{-p-2}(y_i - z_i) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y_i \partial y_j}(y) &= -kp(p+2)|y - z|^{-p-4}(y_i - z_i)(y_j - z_j) + kp|y - z|^{-p-2}\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} Lw(y) = &- kp(p+2)|y - z|^{-p-4} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(y)(y_i - z_i)(y_j - z_j) + \\ &+ kp|y - z|^{-p-2} \sum_{i=1}^m a_{ii}(y) + kp|y - z|^{-p-2} \sum_{i=1}^m b_i(y)(y_i - z_i) \end{aligned}$$

Siano ora λ un numero > 0, tale che $\langle a(y)\xi, \xi\rangle \ge \lambda|\xi|^2$ per ogni $y \in D$ e $\xi \in \mathbb{R}^m$, M un numero che maggiora la norma di $b(y)$ e la traccia di $a(y)$ per ogni $y \in W$. Allora

$$\begin{aligned} Lw(y) &\le -kp(p+2)\lambda|y - z|^{-p-2} + kpM|y - z|^{-p-2} + kpM|y - z|^{-p-1} = \\ &= -kp|y - z|^{-p-2}(\lambda(p+2) - M - M|y - z|) \end{aligned}$$

Se W è un intorno limitato di x, allora la quantità $|y - z|$ resta limitata per $y \in W$. Si può dunque scegliere p abbastanza grande in modo che sia $\lambda(p+2) - M - M|y - z| > 1$ su W. Con questa scelta si ha, per $y \in W \cap D$,

$$Lw(y) \le -kp|y - z|^{-p-2} \le -kp|x - z|^{-p-2}$$

e, scegliendo k abbastanza grande, si ha $Lw(y) \le -1$, come richiesto.

S9.12 a) Per il Teorema 9.9 una soluzione è data da $u(x, t) = \mathrm{E}^{x,t}[X_T^2]$, dove $\mathrm{P}^{x,t}$ è la legge della diffusione di generatore differenziale $Lu = \frac{1}{2}u''$ con le condizioni iniziali x, t. Rispetto a $\mathrm{P}^{x,t}$ X_T^2 ha la stessa legge di $(B_{T-t}+x)^2$, dove $(B_t)_t$ è un moto browniano. Dunque

$$u(x, t) = \mathrm{E}(B_{T-t}^2 + 2xB_{T-t} + x^2) = T - t + x^2.$$

La soluzione è unica tra le soluzioni a crescita polinomiale per il Teorema 9.7.

b) Se $\phi(x) = x^m$, allora l'unica soluzione a crescita polinomiale è

$$u(x, t) = \mathrm{E}[(B_{T-t} + x)^m] = \sum_{i=1}^m \binom{m}{k} x^k \mathrm{E}(B_{T-t}^{m-k})$$

Poiché $E(B^{m-k}_{T-t}) = 0$ se $m-k$ è dispari, mentre $E(B^{m-k}_{T-t}) = (T-t)^\ell E(B_1^{2\ell})$ se $m-k = 2\ell$, u è un polinomio nelle variabili x, t. Basta ora osservare che la soluzione u è lineare in ϕ.

S9.13 Si vede facilmente con la formula di Ito (usando i soliti accorgimenti, perché la funzione log non è definita su tutto $\mathbb{R}$) che, se τ indica il tempo d'uscita dalla semiretta $]0, +\infty[$, allora, scrivendo $\eta_s = \eta_s^{y,t}$, $y = \log x$ e $\xi_s = \xi_s^{x,t}$ per semplicità,

$$\begin{aligned}\eta_{s\wedge\tau} &= y + \int_t^{s\wedge\tau} \big(b(\xi_u, u) + \frac{1}{2}\sigma(\xi_u, u)^2\big)\,du + \int_t^{s\wedge\tau} \sigma(\xi_u, u)\,dB_s = \\ &= y + \int_t^{s\wedge\tau} \big(b(e^{\eta_u}, u) + \frac{1}{2}\sigma(e_u^{\eta_u}, u)^2\big)\,du + \int_t^{s\wedge\tau} \sigma(e_u^{\eta_u}, u)\,dB_s.\end{aligned}$$

Posto $\tilde b(y,u) = b(e^y, u) + \frac{1}{2}\sigma(e^y, u)^2$, $\tilde\sigma(y,u) = \sigma(e^y, u)$, il processo η coincide dunque fino al tempo τ con la soluzione Y dell'EDS

$$\begin{aligned} dY_s &= \tilde b(Y_s, s)\,ds + \tilde\sigma(Y_s, s)\,dB_s \\ Y_t &= y = \log x. \end{aligned} \tag{12.34}$$

Poiché i coefficienti $\tilde b, \tilde\sigma$ sono limitati e localmente lipschitziani, per il Teorema 8.8, l'EDS (12.34) ha soluzione per $s \in [t, T]$. Poiché la soluzione è unica, anche il processo η è definito su $[t, T]$, e dunque $\tau > T$ q.c. (anzi $\tau = +\infty$ q.c.).

b) Il generatore $\tilde L_t$ della diffusione Y è

$$\tilde L_t = \frac{1}{2}\tilde\sigma(y,t)^2 \frac{d^2}{dy^2} + \tilde b(y,t)\frac{d}{dy}.$$

Inoltre, se poniamo $\tilde\phi(y) = \phi(e^y)$, $\tilde f(y,s) = f(e^y.s)$ e $\tilde c(y,s) = c(e^y, s)$, si può scrivere

$$u(e^y, t) = E\big[\tilde\phi(\eta_T^{y,t})\, e^{-\int_t^T \tilde c(\eta_v^{y,t}, v)\,dv}\big] - E\Big[\int_t^T \tilde f(\eta_s^{y,t}, s)\, e^{-\int_t^s c(\eta_v^{y,t}, v)\,dv}\,ds\Big].$$

Poiché ϕ e f sono a crescita polinomiale in x, $\tilde\phi$ e $\tilde f$ sono a crescita esponenziale in y. L'operatore $\tilde L_t$ soddisfa alle Ipotesi (A') ed ha un coefficiente di diffusione è limitato. Per il Teorema 9.9, la funzione $\tilde u(y,t) = u(e^y, t)$ è soluzione di

$$\begin{cases} \tilde L_t \tilde u + \dfrac{\partial \tilde u}{\partial t} - \tilde c \tilde u = \tilde f & \text{su } \mathbb{R} \times [0, T[\\ \tilde u(y, T) = \tilde\phi(y) \end{cases}$$

Si vede facilmente che

$$\Big(\tilde L_t + \frac{\partial}{\partial t} - \tilde c\Big)\tilde u(y,t) = \Big(L_t + \frac{\partial}{\partial t} - c\Big)u(e^y, t)$$

e dunque u è soluzione di (9.38).

S9.14 a) Ovviamente si ha

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi(T-t))^{m/2}} \int \phi(y)\, e^{-\frac{1}{2(T-t)}|x-y|^2}\,dy$$

e si vede facilmente che u è C^∞ perché si può derivare sotto il segno (non è altro che la Proposizione 9.14).

b) È una conseguenza della proprietà di Markov (Proposizione 5.6): se $t \le T$, poiché $\phi(X_T)$ è una v.a. $\mathscr{G}_\infty^t$ misurabile limitata, si ha condizionando

$$u(x,s) = E^{x,s}[E^{x,s}(\phi(X_T) \mid \mathscr{F}_t^s)] = E^{x,s}[E^{X_t,t}(\phi(X_T))] = E^{x,s}[u(X_t, t)].$$

c) Grazie ad a), la funzione $x \to u(x, T')$ è continua per ogni $T' < T$. Inoltre u è chiaramente limitata, dato che ϕ lo è. Per il punto b) e la formula di Feynman-Kac (Teorema 9.9) u è quindi soluzione di (9.39) su $\mathbb{R}^m \times [0, T'[$ e quindi, per l'arbitrarietà di T', su $\mathbb{R}^m \times [0, T[$.

Per mostrare la (9.40), sia x un punto di continuità per ϕ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Sia $\delta > 0$ tale che $|\phi(x) - \phi(y)| \le \varepsilon$ se $|x - y| \le \delta$. Sia poi $\bar t > 0$ un numero tale che $P^{x,t}(|X_T - x| > \delta) = P^{x,0}(|X_{T-t} - x| > \delta) < \varepsilon$ per ogni $T - \bar t < t < T$. Un tale numero esiste sicuramente perché, rispetto a $P^{x,0}$, $(X_t - x)_t$ è un moto browniano e quindi

$$P^{x,0}(|X_{T-t} - x| > \delta) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{|y| > \delta/\sqrt{T-t}} e^{-\frac{1}{2}|y|^2}\,dy \underset{t\to T}{\to} 0$$

Se $T - \bar t < t < T$ si ha allora

$$\begin{aligned} |u(x,t) - \phi(x)| &\le E^{x,t}[|\phi(X_T) - \phi(x)|] = \\ &= E^{x,t}\big[|\phi(X_T) - \phi(x)| 1_{\{|X_T - x| > \delta\}}\big] + E^{x,t}\big[|\phi(X_T) - \phi(x)| 1_{\{|X_T - x| \le \delta\}}\big] \le \\ &\le \|\phi\|_\infty P^{x,t}(|X_T - x| > \delta) + \varepsilon < \varepsilon(\|\phi\|_\infty + 1) \end{aligned}$$

e si conclude per l'arbitrarietà di ε.

d) Applicando il risultato di c) con $\phi = 1_{[0,+\infty[}$, si ha subito che

$$u(x,t) = E^{x,t}[1_{[0,+\infty[}(X_T)] = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-x/\sqrt{T-t}} e^{-y^2/2}\,dy$$

è soluzione del problema proposto; $x = 0$ è il solo punto di discontinuità di $\phi = 1_{[0,+\infty[}$ ed è immediato che $u(0,t) = \frac{1}{2}$ per ogni $t \le T$.

S9.15 a) Basta dimostrare (Proposizione 7.23 b)) che $E(e^{\mu\theta^2|B_s + x|^2}) < +\infty$ per ogni $s \le T$ per qualche valore di $\mu > 0$. Ma questo è immediato poiché

$$E(e^{\mu\theta^2|B_s+x|^2}) \le e^{2\mu\theta^2|x|^2} E(e^{2\mu\theta^2|B_s|^2}) = e^{2\mu\theta^2|x|^2} E(e^{2\mu\theta^2 B_1(s)^2})^m$$

e il termine a destra è finito per ogni $s \le T$ non appena $\mu < (4\theta^2 T)^{-1}$ (Esercizio 0.12).

b) Per il Teorema 7.22 di Girsanov, rispetto a Q il processo

$$W_t = B_t - \theta \int_0^t (B_s + x)\, ds$$

è un moto browniano per $t \le T$; quindi, se $Y_t = B_t + x$,

$$Y_t = B_t + x = x + \theta \int_0^t Y_s\, ds + W_s$$

e $(Y_t)_t$ è, rispetto a Q, un processo di Ornstein-Uhlenbeck, avente x come valore iniziale. Riprendendo i calcoli del paragrafo 8.2, Y_t è una v.a. gaussiana di media $b = e^{\theta t} x$ e matrice di covarianza $\Gamma = \frac{1}{2\theta}(e^{2\theta t} - 1)I$.

c) Per la formula di Ito, rispetto a P,

$$\int_0^T (B_s + x)\, dB_s = \frac{1}{2}(|B_T|^2 - mT) + \langle x, B_T\rangle.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}\big[\exp(-\tfrac{\theta}{2}(|B_T|^2 - mT) - \theta\langle x, B_T\rangle)\big] &= \mathrm{E}\big[Z_T \exp(-\tfrac{\theta}{2}(|B_T|^2 - mT) - \theta\langle x, B_T\rangle)\big] = \\
= \mathrm{E}\Big[\exp\Big(\theta \int_0^T (B_s + x)\, dB_s - \frac{\theta^2}{2}\int_0^T |B_s + x|^2 ds - \frac{\theta}{2}(|B_T|^2 - mT) &- \theta\langle x, B_T\rangle\Big)\Big] = \\
&= \mathrm{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\theta^2}{2}\int_0^T |B_s + x|^2 ds\Big)\Big].
\end{aligned}$$

d) Si può scrivere $X = b + \Gamma^{1/2} Z$, dove $Z \sim N(0, I)$. Dunque

$$\langle AX, X\rangle = \langle \Gamma^{1/2} A \Gamma^{1/2} Z, Z\rangle + 2\langle \Gamma^{1/2} Ab, Z\rangle + \langle Ab, b\rangle$$

e

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(e^{\frac{1}{2}\langle AX,X\rangle}) &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int e^{\frac{1}{2}(\langle \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2}z, z\rangle + 2\langle \Gamma^{1/2}Ab, z\rangle + \langle Ab, b\rangle)} e^{-\frac{1}{2}|z|^2}\, dz = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int \exp\Big[-\frac{1}{2}\big(\langle (I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2})z, z\rangle - 2\langle \Gamma^{1/2}Ab, z\rangle - \langle Ab, b\rangle\big)\Big]\, dz.
\end{aligned} \tag{12.35}$$

Questo tipo d'integrali si calcola scrivendo l'esponente nella forma

$$-\frac{1}{2}\langle (I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2})(z + w), z + w\rangle$$

più un termine che non dipende da z, dove $w \in \mathbb{R}^m$ è un vettore da determinare. Si ha

$$\begin{aligned}
&\langle (I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2})(z + w), z + w\rangle = \\
&= \langle (I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2})z, z\rangle + 2\langle (I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2})w, z\rangle + \langle (I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2})w, w\rangle.
\end{aligned}$$

Deve dunque essere $(I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2})w = -\Gamma^{1/2}Ab$, ovvero, se la matrice $I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2}$ è invertibile,

$$w = -(I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2})^{-1}\Gamma^{1/2}Ab.$$

Con questa scelta di w l'esponente dell'integrando nella (12.35) diviene, a parte il fattore $\frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
-\langle (I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2})(z + w), z + w\rangle &+ \big(\langle Ab, b\rangle + \langle A\Gamma^{1/2}(I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2})^{-1}\Gamma^{1/2}Ab, b\rangle = \\
= -\langle (I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2})(z + w), z + w\rangle &+ \langle (A + A\Gamma^{1/2}(I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2})^{-1}\Gamma^{1/2}A)b, b\rangle.
\end{aligned}$$

Con il cambio di variabile $z + w \to z$ e riconoscendo, a meno della costante, l'integrale di una densità gaussiana, si ha, se la matrice $I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2}$ è definita positiva,

$$\int e^{-\frac{1}{2}\langle (I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2})(z+w), z+w\rangle}\, dz = (2\pi)^{m/2} \det(I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2})^{-1/2}.$$

In conclusione, $\mathrm{E}(e^{\frac{1}{2}\langle AX,X\rangle})$ è uguale a

$$\det(I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2})^{-1/2} \exp\Big(\frac{1}{2}\langle (A + A\Gamma^{1/2}(I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2})^{-1}\Gamma^{1/2}A)b, b\rangle\Big).$$

Se invece la matrice $I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2}$ non è definita positiva, l'integrando nella (12.35) non tende a 0 per $|z| \to +\infty$ e si vede con un po' di calcolo che l'integrale è infinito. In questo caso dunque $\mathrm{E}(e^{\frac{1}{2}\langle AX,X\rangle}) = +\infty$. In particolare se $X \sim N(b, \sigma^2 I)$, per $A = 2\theta I$, si ha $I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2} = (1 - 2\sigma^2\theta)I$ e

$$\begin{aligned}
A + A\Gamma^{1/2}(I - \Gamma^{1/2}A\Gamma^{1/2})^{-1}\Gamma^{1/2}A &= \big(2\theta + 2\theta\sigma(1 - 2\theta\sigma^2)^{-1}2\theta\sigma\big)I = \\
&= \Big(2\theta + \frac{4\theta^2\sigma^2}{1 - 2\theta\sigma^2}\Big)I = \frac{2\theta}{1 - 2\theta\sigma^2} I
\end{aligned}$$

e dunque

$$\mathrm{E}(e^{\theta|X|^2}) = (1 - 2\sigma^2\theta)^{-m/2} \exp\Big(\frac{\theta}{1 - 2\sigma^2\theta}|b|^2\Big) \tag{12.36}$$

se $2\sigma^2\theta < 1$ e $\mathrm{E}(e^{\theta|X|^2}) = +\infty$ altrimenti, cioè la (9.42).

e) Se $\lambda = -\frac{\theta^2}{2}$, grazie a c) la v.a. $B_T + x$ ha, rispetto a Q, una legge normale di media $b = e^{\theta T} x$ e matrice di covarianza $\Gamma = \sigma^2 I$, con $\sigma^2 = \frac{1}{2\theta}(e^{2\theta T} - 1)$. Per il punto d), sostituendo θ con $-\frac{\theta}{2}$ nella (12.36),

$$\mathrm{E}\Big[\exp\Big(\lambda \int_0^T (B_s + x)^2\, ds\Big)\Big] = \mathrm{E}^{\mathrm{Q}}\big[\exp(-\tfrac{\theta}{2}(|B_T|^2 - mT) - \theta\langle x, B_T\rangle)\big] =$$
$$= e^{\frac{\theta}{2}(mT+|x|^2)}\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}\big[e^{-\frac{\theta}{2}|B_T+x|^2}\big] = e^{\frac{\theta}{2}(mT+|x|^2)}(1+\sigma^2\theta)^{-m/2}\exp\Big(-\frac{\theta}{2(1+\sigma^2\theta)}|b|^2\Big).$$

Si vede subito che $1 + \sigma^2\theta = \frac{1}{2}(e^{2\theta T} + 1)$, per cui

$$e^{\frac{\theta}{2}mT}(1+\sigma^2\theta)^{-m/2} = (e^{\theta T})^{m/2}\Big(\frac{e^{2\theta T}+1}{2}\Big)^{-m/2} = \Big(\frac{e^{2\theta T}+1}{2e^{\theta T}}\Big)^{-m/2} = \cosh(\theta T)^{-m/2}$$

mentre

$$e^{\frac{\theta}{2}|x|^2}\exp\Big(-\frac{\theta}{2(1+\sigma^2\theta)}|b|^2\Big) = \exp\Big(\frac{\theta|x|^2}{2}\Big(1 - \frac{2e^{2\theta T}}{e^{2\theta T}+1}\Big)\Big) =$$
$$= \exp\Big(-\frac{\theta|x|^2}{2}\tanh(\theta T)\Big).$$

Cioè

$$\mathrm{E}\Big[\exp\Big(\lambda \int_0^T |B_s + x|^2\, ds\Big)\Big] = \cosh(\theta T)^{-m/2}\exp\Big[-\frac{\theta|x|^2}{2}\tanh(\theta T)\Big]$$

f) Per il Teorema 9.9, una soluzione del problema (9.41) è data da

$$u(x,t) = \mathrm{E}^{x,t}\Big[e^{-\lambda\int_t^T |X_s|^2\, ds}\Big],$$

dove $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (X_t)_t, (\mathrm{P}^{x,t})_{x,t})$ è la diffusione canonica associata all'operatore $L = \frac{1}{2}\Delta$. Sappiamo però che, rispetto a $\mathrm{P}^{x,t}$, il processo $(X_s)_{s\ge t}$ ha la stessa legge di $(B_{s-t} + x)_t$, dove $(B_t)_t$ è un moto browniano. Dunque

$$u(x,t) = \mathrm{E}\Big[e^{-\lambda\int_0^{T-t}|B_s+x|^2\, ds}\Big] =$$
$$= \cosh\big(\sqrt{2\lambda}\,(T-t)\big)^{-m/2}\exp\Big[-\frac{\sqrt{2\lambda}\,|x|^2}{2}\tanh\big(\sqrt{2\lambda}\,(T-t)\big)\Big].$$

Questa soluzione, che è limitata, è unica tra le funzioni a crescita polinomiale.

S10.1 Siamo nel campo di applicabilità delle formule del filtro di Kalman-Bucy. La varianza della legge condizionale R_t si calcola risolvendo l'equazione di Riccati (10.15). Qui $a = \sigma_1 = \sigma_2 = 0$ e $\alpha = 1$, quindi

$$R_t' = 2bR_t - \frac{1}{\Sigma^2}R_t^2$$

con la condizione iniziale $R_0 = \sigma^2$. Separando le variabili, con un po' di pazienza si trova, se $b \ne 0$,

$$R_t = \frac{2b\Sigma^2}{1 + Ke^{-2bt}}$$

dove $K = \frac{2b\Sigma^2}{\sigma^2} - 1$ (a ben vedere si tratta di una quantità positiva anche se $b < 0$). Tralasceremo il caso $b = 0$, che è stato trattato nell'Esempio 10.5 e nell'Esercizio 3.8. La varianza della legge condizionale tende a 0 per $t \to +\infty$ se e solo se $b < 0$. Poiché $\mathrm{E}[(X_t - \hat{X}_t)^2] = R_t$, dunque $\mathrm{E}[(X_t - \hat{X}_t)^2] \to 0$ per $t \to +\infty$ se $b < 0$. Il limite invece vale $2b\Sigma^2$ se $b > 0$.

L'equazione (10.16) della media condizionale diviene qui

$$d\hat{X}_t = \Big(b - \frac{2b}{1+Ke^{-2bt}}\Big)\hat{X}_t\, dt + \frac{2b}{1+Ke^{-2bt}}\, dY_t \tag{12.37}$$

con la condizione iniziale $\hat{X}_0 = \mu$. Per risolvere questa equazione, che è lineare in $\hat{X}_t$, usiamo, il metodo della variazione delle costanti arbitrarie che abbiamo visto nel paragrafo 8.2 e nell'Esercizio 8.1. L'integrale generale dell'equazione ordinaria

$$x_t' = \Big(b - \frac{2b}{1+Ke^{-2bt}}\Big)x_t$$

è

$$x_t = x_0\exp\Big(bt - \int_0^t \frac{2b}{1+Ke^{-2bs}}\, ds\Big).$$

L'integrale nell'esponente si calcola con la sostituzione $e^{-2bs} = u$ e poi integrando la funzione razionale che ne risulta. Il risultato è

$$x_t = x_0\exp\big[bt - 2bt - \log(1+Ke^{-2bt}) + \log(1+K)\big] = x_0\frac{e^{-bt}(1+K)}{1+Ke^{-2bt}}\cdot$$

Cerchiamo una soluzione di (12.37) della forma

$$\hat{X}_t = \frac{e^{-bt}(1+K)}{1+Ke^{-2bt}}C_t.$$

Si vede subito che deve essere

$$\frac{e^{-bt}(1+K)}{1+Ke^{-2bt}}\, dC_t = \frac{2b}{1+Ke^{-2bt}}\, dY_t$$

ovvero $dC_t = 2be^{bt}(1+K)^{-1}\, dY_t$. La soluzione di (12.37) è dunque

$$\hat{X}_t = \frac{e^{-bt}(1+K)}{1+Ke^{-2bt}}\,\mu + \frac{2be^{-bt}}{1+Ke^{-2bt}}\int_0^t e^{bs}\, dY_s.$$

Può essere utile, integrando per parti, giungere a una formula senza integrali stocastici, più pratica per una soluzione numerica. A partire da

$$d(e^{bs}Y_s) = e^{bs}\,dY_s + be^{bs}Y_s\,ds$$

si ottiene (ricordando che $Y_0 = 0$)

$$\int_0^t e^{bs}\,dY_s = e^{bt}Y_t - \int_0^t be^{bs}Y_s\,ds$$

e quindi

$$\hat{X}_t = \frac{e^{-bt}(1+K)}{1+Ke^{-2bt}}\,\mu + \frac{2bY_t}{1+Ke^{-2bt}} - \frac{2b^2}{1+Ke^{-2bt}}\int_0^t e^{-b(t-s)}Y_s\,ds.$$

Da questa relazione è facile ricavare numericamente $\hat{X}_t$ a partire dalla traiettoria $(Y_s)_{s\le t}$ dell'osservazione. In questo caso, a differenza dell'Esempio 10.5, $\hat{X}_t$ dipende da tutta la traiettoria dell'osservazione e non solo dal suo valore al tempo t.

S10.2 Scriviamo l'equazione di Riccati (10.15). Si ha $b = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $a = 2$, $\Sigma = 1$, $\alpha = 1$. Sviluppando si ottiene

$$R_t' = 1 - R_t^2. \tag{12.38}$$

Il polinomio $Q(x) = 1 - x^2$ si annulla, per $x \ge 0$, unicamente per $x = 1$. Esso è inoltre > 0 per $x < 1$ e < 0 per $x > 1$. Ne segue facilmente che ogni soluzione di (12.38) converge a 1 per $t \to +\infty$, qualunque sia il valore iniziale $R_0 \ge 0$.

b) Si ha ora $b = 1$, $\sigma_2 = 1$ e

$$\sigma_1 = (1,1), \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $a = 3$. Dunque la (10.15) è ora

$$R_t' = 1 - 2R_t - 2R_t^2$$

Si tratta sempre di un'equazione della forma $R_t' = Q(R_t)$, dove $Q(x) = 1 - 2x - 2x^2$ è ancora un polinomio che ha la sola radice positiva

$$\rho = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) = 0.366.$$

Ripetendo lo stesso ragionamento di a), questo è il limite della varianza condizionale R_t per $t \to +\infty$.

S10.3 In questo caso $\sigma_2 \in \mathbb{R}$, mentre σ_1 è un vettore $1 \times k$. Il numero $a = \sigma\sigma^*$ quindi vale $a = |\sigma_1|^2 + \sigma_2^2$. L'equazione di Riccati (10.15) diviene qui

$$\begin{aligned} R_t' &= a + 2bR_t - |\sigma_1|^2 - 2\langle\sigma_1, \Sigma^{-1}\alpha\rangle R_t - \langle(\Sigma\Sigma^*)^{-1}\alpha, \alpha\rangle R_t^2 = \\ &= \sigma_2^2 + \underbrace{2(b - \langle\sigma_1, \Sigma^{-1}\alpha\rangle)}_{=c} R_t - \underbrace{\langle(\Sigma\Sigma^*)^{-1}\alpha, \alpha\rangle}_{=d} R_t^2 \end{aligned}$$

Si ha $d = \langle(\Sigma\Sigma^*)^{-1}\alpha, \alpha\rangle = |\Sigma^{-1}\alpha|^2 > 0$. Dunque il polinomio $Q(x) = \sigma_2^2 + cx - dx^2$ tende a $-\infty$ per $x \to +\infty$. Se $\sigma_2^2 > 0$, Q ha una radice $\rho > 0$ e si ha $R_t' > 0$ per $R_t < \rho$ e $R_t' < 0$ per $R_t > \rho$. Da ciò è facile dedurre che $\lim_{t\to+\infty} R_t = \rho$.

Se invece $\sigma_2 = 0$, allora ci sono due possibilità. Se $Q'(0) = c = 2(b - \langle\sigma_1, \Sigma^{-1}\alpha\rangle) \le 0$, allora 0 è l'unica radice ≥ 0 di Q. Dunque $R_t' < 0$ per ogni t tale che $R_t > 0$. Ne segue che $\lim_{t\to+\infty} R_t = 0$. Se invece $Q'(0) = c > 0$, allora Q ha una radice $\rho > 0$ e, ragionando come prima, $\lim_{t\to+\infty} R_t = \rho$.

In conclusione, la varianza della legge condizionale converge a 0 se e solo se $\sigma_2 = 0$ e $b \le \langle\sigma_1, \Sigma^{-1}\alpha\rangle$.

S10.4 a) Per il Teorema 10.9, il prezzo al tempo s delle opzioni è

$$C = e^{-r(T-s)}E^Q[(S_1(T) - K)^+], \qquad P = e^{-r(T-s)}E^Q[(S_1(T) - K)^-].$$

Ricordando che i prezzi attualizzati $\tilde{S}_1(t) = e^{-r(t-s)}S_1(t)$ formano una martingala rispetto a Q,

$$C - P = e^{-r(T-s)}E^Q[S_1(T) - K] = E^Q[\tilde{S}_1(s)] - e^{-r(T-s)}K = x - e^{-r(T-s)}K$$

b) Supponiamo che sia $C > P + x - Ke^{-(T-s)r}$. Si può allora costituire un portafoglio acquistando una unità del titolo di base e una opzione put e vendendo una opzione call. Il prezzo dell'operazione è $C - P - x$, che viene coperto mediante un investimento di segno opposto nel titolo senza rischio. Questa operazione dunque non richiede investimenti. A maturità si dispone di una opzione put, di una unità del titolo di base, di un importo (positivo o negativo) $-(C - P - x)\,e^{r(T-s)}$ e bisogna onorare un call. I casi sono due

- $S_1(T) > K$. In questo caso il call viene esercitato; per soddisfarlo viene ceduto il titolo di base, incassando una quantità di denaro pari a K. Il put naturalmente non ha valore. Il bilancio globale dell'operazione è $K - (C - P - x)\,e^{r(T-s)} > 0$.
- $S_1(T) \le K$. In questo caso il call non viene esercitato. Si usa allora il put per vendere l'unità di titolo di base al prezzo K. Il bilancio globale dell'operazione è ancora $K - (C - P - x)\,e^{r(T-s)} > 0$.

In maniera simile si può costituire un portafoglio d'arbitraggio se invece $C < P + x - Ke^{-(T-s)r}$.

S11.1 a) Per il Teorema Limite Centrale la successione

$$Y_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$$

converge in legge verso una v.a. $N(0,1)$, dove μ e σ^2 sono rispettivamente la media e la varianza di X_1. Evidentemente $\mu = \frac{1}{2}$, mentre

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

e dunque $\sigma^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. La v.a. W non è altro che Y_{12}. Resta da vedere se $n = 12$ sia un numero abbastanza grande perché Y_n sia approssimativamente $N(0,1)$ ...

b) Si ha, integrando per parti,

$$\mathrm{E}(X^4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(-x^3 e^{-x^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + 3 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,dx \Big) =$$
$$= 3 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,dx}_{=\mathrm{Var}(X)=1} = 3.$$

Un po' più complicato è il calcolo del momento di ordine 4 di W. Se $Z_i = X_i - \frac{1}{2}$, allora le v.a. Z_i sono indipendenti e uniformi su $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Inoltre

$$\mathrm{E}(W^4) = \mathrm{E}[(Z_1 + \ldots + Z_{12})^4].$$

Poiché $\mathrm{E}(Z_i) = \mathrm{E}(Z_i^3) = 0$ (le v.a. Z_i sono simmetriche rispetto all'origine), la speranza matematica di molti dei termini che appaiono nello sviluppo di $(Z_1 + \ldots + Z_{12})^4$ è nulla. Ad esempio, poiché le v.a. Z_i, $i = 1, \ldots, 12$, sono indipendenti,

$$\mathrm{E}(Z_1^3 Z_2) = \mathrm{E}(Z_1^3)\mathrm{E}(Z_2) = 0.$$

Un attimo di riflessione mostra che danno un contributo $\neq 0$ solo i termini della forma $\mathrm{E}(Z_i^2 Z_j^2) = \mathrm{E}(Z_i^2)\mathrm{E}(Z_j^2)$ con $i \neq j$ e quelli della forma $\mathrm{E}(Z_i^4)$. Il termine Z_i^4 ha chiaramente un coefficiente 1 nello sviluppo. Per vedere quale sia il coefficiente di $Z_i^2 Z_j^2$, $i \neq j$, si può osservare che nello sviluppo in serie di potenze della funzione

$$\phi(x_1, \ldots, x_{12}) = (x_1 + \ldots + x_{12})^4$$

il monomio $x_i^2 x_j^2$, per $i \neq j$, ha per coefficiente

$$\frac{1}{2!2!} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}(0) = \frac{1}{4} \times 24 = 6.$$

Calcoliamo ora

$$\mathrm{E}(Z_i^2) = \int_{-1/2}^{1/2} x^2\,dx = \frac{1}{12}, \qquad \mathrm{E}(Z_i^4) = \int_{-1/2}^{1/2} x^4\,dx = \frac{1}{80}.$$

Poiché, per simmetria, i termini della forma $\mathrm{E}(Z_i^2 Z_j^2)$, $i \neq j$ sono tutti uguali e sono $11 + 10 + \ldots + 1 = \frac{1}{2} \times 12 \times 11$, il loro contributo è

$$6 \times \frac{1}{2} \times 12 \times 11 \times \frac{1}{144} = \frac{11}{4}.$$

Il contributo dei termini della forma $\mathrm{E}(Z_i^4)$ (che sono 12), è invece $\frac{12}{80}$. In conclusione

$$\mathrm{E}(W^4) = \frac{11}{4} + \frac{12}{80} = 2.9.$$

Come si vede il simulatore W ha una legge che differisce da quella che si vorrebbe simulare per il valore del momento di ordine 4 e in maniera sensibile. Quindi, anche se probabilmente il tempo macchina necessario a produrlo è ridotto (il valore $n = 12$ è stato certamente scelto per questo motivo), è sconsigliabile usarlo per simulazioni che richiedano la generazione di molte v.a. gaussiane. I risultati potrebbero essere distorti. D'altra parte il generatore dell'Esempio 11.8 non richiede un tempo di calcolo maggiore.

S11.2 Indichiamo con $\mathcal{K}$ la classe dei compatti di E e con $\mathcal{A}$ la classe degli elementi di $\mathcal{F}$ della forma $X^{-1}(K)$, $K \in \mathcal{K}$. La relazione

$$X^{-1}\Big(\bigcap_n K_n\Big) = \bigcap_n X^{-1}(K_n)$$

implica facilmente che anche $\mathcal{A}$ è una classe compatta. Inoltre, se $A \in \mathcal{B}(E)$, poiché la legge di X è una misura su $(E, \mathcal{B}(E))$ ed è dunque regolare rispetto alla classe dei compatti, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K \subset A$ tale che

$$\mathrm{P}(X \in A) - \mathrm{P}(X \in K) < \varepsilon$$

Ovvero P è regolare su $\sigma(X)$ rispetto ad $\mathcal{A}$.

Bibliografia

[Aa81] R. Azencott e al. *Géodésiques et Diffusions en temps petit*. Astérisque, 1981.

[Aze80] R. Azencott. Grandes déviations et applications. In *Ecole d'Été de Probabilités de St. Flour VIII-1978*, Lect. Notes Math. 774. Springer, 1980.

[BG68] R.M. Blumenthal e R.K. Getoor. *Markov Processes and Potential Theory*. Academic Press, New York, 1968.

[Bis81] M. Bismut. Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general hormander conditions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 56:469–505, 1981.

[BL94] N. Bouleau e D. Lepingle. *Numerical methods for stochastic processes*. J. Wiley and son, New York, 1994.

[Bre92] L. Breiman. *Probability*. Addison-Wesley, Reading Mass., 1992.

[Chu68] K.L. Chung. *A course in Probability Theory*. Harcourt, Brace and World, 1968.

[Chu80] K.L. Chung. *Lectures from Markov Processes to Brownian Motion*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[Dev86] L. Devroye. *Non-uniform Random Variate Generation*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1986.

[DM75] C. Dellacherie e P.-A. Meyer. *Probabilités et Potentiel, chap. I à IV*. Hermanan, Paris, 1975.

[DM87] C. Dellacherie e P.-A. Meyer. *Probabilités et Potentiel: théorie du potentiel, processus de Markov*. Hermann, Paris, 1987.

[Doo53] J.L. Doob. *Stochastic Processes*. J. Wiley and sons, New York, 1953.

[Doo84] J.L. Doob. *Classical potential Theory and its probabilistic counterpart*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1984.

[Dos77] H. Doss. Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires. *Ann. Inst. H. Poincaré, B*, 13:99–126, 1977.

[Dyn60] E.B. Dynkin. *The Theory of Markov Processes*. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris, 1960.

[Dyn65] E.B. Dynkin. *Markov Processes, I e II*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1965.

[DZ97] A. Dembo e O. Zeitouni. *Large Deviations Techniques and Applications*. Berlin, Heidelberg, New York, 1997.

[EK86] S.N. Ethier e T.G. Kurtz. *Markov Processes. Characterization and convergence*. Wiley and son, New York, 1986.

[Elw82] K.D. Elworthy. *Stochastic Differential Equations on Manifolds*. Cambridge University Press, 1982.

[Fel66] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its applications, I e II*. J. Wiley and sons, New York, 1966.

[FR75] W. Fleming e R.W. Rishel. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Springer, 1975.

[Fre71] D. Freedman. *Brownian Motion and Diffusion*. Holden-Day, 1971.

[Fri64] A. Friedman. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice Hall, 1964.

[Fri75] A. Friedman. *Stochastic Differential Equations and Applications, I e II*. Academic Press, New York, 1975.

[FV83] I.M. Freidlin e A.D. Ventsel. *Random Perturbations of Dynamical Systems*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.

[Gal81] L. Gallardo. Au sujet du contenu probabiliste d'un lemme d'Henri Poincaré. *Ann. Sci. Univ. Clermont-Ferrand II*, 69:165, 1981.

[GS72] I.I. Gihman e A.V. Shorohod. *Stochastic Differential Equations*. Springer, 1972.

[Hid80] T. Hida. *Brownian Motion*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[IM65] K. Ito e H.P. McKean. *Diffusion Processes and their sample paths*. Springer, Berlin, 1965.

[Ito44] K. Ito. Stochastic integral. *Proc. Imp. Acad. Japan*, 20:519–524, 1944.

[IW81] N. Ikeda e S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North Holland, 1981.

[Kal80] G. Kallianpur. *Stochastic Filtering Theory*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[KP92] P.E Kloeden e E. Platen. *Numerical solutions of Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1992.

[Kry80] N.V. Krylov. *Controlled Diffusion Processes*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[KS91] I. Karatzas e S.E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2^{nd} edition*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1991.

[KS98] I. Karatzas e S.E. Shreve. *Methods of mathematical finance*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.

[Kun82] H. Kunita. Stochastic partial differential equations connected with nonlinear filtering. In *Nonlinear Filtering and Stochastic Control*, Lect. Notes Math. 972, page 100. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

[Let84] G. Letta. *Martingales et Intégration Stochastique*. Quederni della Scuola Normale Superiore di Pisa. Pisa, 1984.

[Lev07] E. E. Levi. Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali. *Rend. Circolo. Mat. Palermo*, 24:275–317, 1907.

[LL96] D. Lamberton e B. Lapeyre. *Introduction to Stochastic Calculus applied to Finance*. Chapman & Hall, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.

[LPS98] B. Lapeyre, E. Pardoux, e R. Sentis. *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.

[LS77] R.S. Lipster e A.N. Shiryayev. *Statistics of Random Processes, I e II*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

[Mal78] P. Malliavin. Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. In K. Ito Editor, editor, *Proc. Intern. Symp. SDE, Kyoto* 195–263. 1978.

[McK71] H.P. McKean. *Stochastic Integrals*. Academic Press, New York, 1971.

[Mét68] M. Métivier. *Notions fondamentales de la Théorie des Probabilités*. Dunod, 1968.

[Mey67] P.A. Meyer. *Processus de Markov*. Lect. Notes Math. 26. Springer, Berlin-New York-Heidelberg, 1967.

[Mey72] P.A. Meyer. *Martingales and Stochastic Integrals*. Lect. Notes Math. 284. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[Mit82] S.K. Mitter. Nonlinear filtering of diffusion processes: a guided tour. In *Advances in Filtering and Optimal Stochastic Control(Cocoyoc, 1982)*, Lect. Notes Control Inf. Sci. 42. Springer, 1982.

[Nev64] J. Neveu. *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*. Masson et Cie, 1964.

[Nev72] J. Neveu. *Martingales à temps discret*. Masson et Cie, 1972.

[Nua95] D. Nualart. *The Malliavin Calculus and related Topics*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1995.

[Øks98] B. Øksendal. *Stochastic differential equations. An introduction with applications. Fifth edition*. Universitext. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.

[Par82] E. Pardoux. Equations of nonlinear filtering and applications to stochastic control with partial obsevation. In *Nonlinear Filtering and Stochastic Control*, Lect. Notes Math. 972. Springer, 1982.

[Pri74] P. Priouret. Diffusions et équations différentielles stochastiques. In *Ecole d'été de Probabilités de St. Flour III-1973*, Lect. Notes Math. 390. Springer, 1974.

[RW97] L.C.G. Rogers e D. Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales, Vol 2*. J. Wiley and sons, New York, 1997.

[RY97] D. Revuz e M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian motion, 3^{rd} edition*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.

[Sha88] M. Sharpe. *General theory of Markov processes*. Academic Press, New York, 1988.

[Str83] D. Stroock. Some applications of stochastic calculus to partial differential equations. In *Ecole d'été de Probabilités de St. Flour XI-1981*, Lect. Notes Math. 976. Springer, 1983.

[Sus78] H.J. Sussmann. On the gap between deterministic and stochastic differential equations. *Ann. Probab.*, 6:19–41, 1978.

[SV69a] D. Stroock e S.R.S. Varadhan. Diffusion processes with continuous coefficients, I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 22:345–400, 1969.

[SV69b] D. Stroock e S.R.S. Varadhan. Diffusion processes with continuous coefficients, II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 22:479–530, 1969.

[SV79] D.W. Stroock e S.R.S. Varadhan. *Multidimensional Diffusion Processes*. Grundlehren der Mathematisches Wissenschaften 233. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[Wen81] A.D. Wentzell. *A Course in the Theory of Stochastic Processes*. McGraw-Hill, 1981.

[Wil79] D. Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales, vol. I, foundations*. J. Wiley and sons, New York, 1979.

[YW71] T. Yamada e S. Watanabe. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. *J. Math. Kyoto Univ.*, 11:155–167, 1971.

[Zwo74] A.K. Zwonkin. A transformation of phase space of a diffusion process that removes the drift. *Math. USSR Sbornik*, 2:129–149, 1974.