Diario delle Lezioni di Equazioni Differenziali Stocastiche

Prof. Luciano Tubaro

5 luglio 2017

Indice

Stochastic Differential Equations	**a.a. 2016-17**
Lezione del 22/02/2017	
Prof: Luciano Tubaro	*Scritto da: Giulia Bertagnolli*

1 Equazioni Differenziali Ordinarie.

Primo Ordine Consideriamo l'equazione

$$\begin{cases} \dot{x} = b(x(t)) & b : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.0.1}$$

Se $b(x(t)) = c(t)x(t)$, con $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua, è facile vedere che $x(t) = x_0 e^{C(t)}$, ove C è una primitiva di c, è soluzione di (1).

In generale esistenza e unicità della soluzione sono garantite ad esempio nel caso b sia Lipschitziana i.e. esiste una costante C tale che $|b(x) - b(y)| \leq C|x - y|$, cfr [Wal98]; nel caso b sia continua si veda il teorema di Peano.

Secondo Ordine.

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

Si consideri ad esempio

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.0.2}$$

Due modi per risolvere 1.0.2

(i) cercare una soluzione particolare del tipo $e^{\lambda t}$, derivando $\frac{d^2}{dt^2}(e^{\lambda t}) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, $\lambda^2 e^{\lambda t} = -\omega^2 e^{\lambda t}$ da cui otteniamo $x(t) = A_1 cos(\omega t) + A_2 sin(\omega t)$.

(ii) Trasformare l'equazione di secondo grado in un sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases}$$

Riscrivendo in forma matriciale, poniamo $\mathbf{z} = (x, y)^t$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$ in modo che

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} \tag{1.0.3}$$

In questo caso dobbiamo prendere l'esponenziale di matrice così definito

$$e^A := Id + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

e allo stesso modo e^{At}, che può essere derivato

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Id + tA + \frac{t^2A^2}{2} + \frac{t^3A^3}{6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^nA^n}{n!}$$

Allora $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_0 e^{tA}$ è soluzione di (1.0.3). [1]

Quanto visto può essere generalizzato per sistemi di n equazioni.

Equazioni Differenziali Stocastiche

$$dX = b(X)dt + \sigma(X)dW$$

ove $X = X_t$ è un processo stocastico e $W = W_t$ è un processo di Wiener, continuiamo ad usare la notazione del calcolo differenziale, nonostante quanto scritto *non abbia senso*, poiché dW non è un vero differenziale in quanto W_t non è derivabile.

2 Equazioni risolvibili "con le mani"

Come nei casi appena visti nell'ambito delle equazioni differenziali ordinarie, anche tra quelle stocastiche vi sono esempi di equazioni a cui soluzione può essere trovata direttamente, senza bisogno di teoremi di esistenza. Di seguito vedremo alcuni esempi, già introdotti nel corso di Processi Stocastici, cfr [FPTT08] ([CT12] - en).

2.1 Ornstein - Uhlenbeck (1930)

$$X(t) = X_0 + \lambda \int_0^t X(s)ds + \sigma W_t \tag{2.1.1}$$

ove W_t è un processo di Wiener, $X \in L^1(0,t)$, da cui segue che $X(t) - \sigma W_t$ è derivabile. Ora poniamo

$$\begin{aligned} y(t) &:= X(t) - \sigma W_t = X_0 + \lambda \int_0^t X(s)ds \qquad (2.1.2) \\ \dot{y}(t) &= \lambda X(t) = \lambda X(t) + \lambda\sigma W_t \end{aligned}$$

per cui possiamo scrivere

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \lambda y(t) + \lambda\sigma W_t & (2.1.3a) \\ y(0) = X_0 & (2.1.3b) \end{cases}$$

[1] Prima pagina di esercizi sul sito `http://www.science.unitn.it/~tubaro/corso5/lez1.pdf`.

Dopodiché (2.1.3a) diventa

$$\begin{aligned}
&\dot{y}(t) - \lambda y(t) = \lambda\sigma W_t \\
&e^{-\lambda t}(\dot{y}(t) - \lambda y(t)) = e^{-\lambda t}(\lambda\sigma W_t) \\
&\big(y(t)e^{-\lambda t}\big)' = e^{-\lambda t}(\lambda\sigma W_t) \\
&y(t)e^{-\lambda t} - X_0 = \lambda\sigma \int_0^t e^{-\lambda s} W_s ds \\
&y(t) = e^{\lambda t} X_0 + \lambda\sigma \int_0^t e^{(t-s)\lambda} W_s ds
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Abbiamo con questo dimostrato l'unicità della soluzione, se questa esiste. L'esistenza si ottiene mostrando che (2.1.4) soddisfa (2.1.3a - 2.1.3b). Ricordando (2.1.2) possiamo scrivere la soluzione di 2.1.1

$$X(t) = X_0 e^{\lambda t} + \lambda\sigma \int_0^t e^{(t-s)\lambda} W_s ds + \sigma W_t. \tag{2.1.5}$$

Stochastic Differential Equations	**a.a. 2016-17**

Lezione del 24/02/2017

Prof: Luciano Tubaro — *Scritto da: Giulia Bertagnolli*

Ornstein - Uhlenbeck - Continuazione La soluzione dell'equazione di Ornstein Uhlenbeck può essere scritta anche come

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 e^{\lambda t} + \sigma\left(\lambda \int_0^t e^{(t-s)\lambda} W_s ds + (W_t - W_0)\right) \\ &= X_0 e^{\lambda t} + \sigma \int_0^t e^{(t-s)\lambda} dW_s \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Ora, $W_t = W_t(\omega)$ e anche $X_0 = X_0(\omega)$ sono processi stocastici. Anche (2.1.6) è aleatoria, poiché

$$\int_0^t e^{(t-s)\lambda} dW_s$$

è limite di somme finite di variabili casuali

$$\sum_{i=0}^{n-1} e^{\lambda(t-s_i)}(W_{s_{i+1}}(\omega) - W_{s_i}(\omega)),$$

inoltre essendo W_t un processo di Wiener abbiamo

$$\sigma \int_0^t e^{(t-s)\lambda} dW_s(\omega) \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \frac{e^{2\lambda t} - 1}{2\lambda}\right) \tag{2.1.7}$$

Assumendo X_0 indipendente dal processo di Wiener e $X_0 \sim \mathcal{N}(m, \gamma^2)$ si ha che $X(t)$ è un processo Gaussiano di media $me^{\lambda t}$ e varianza $e^{2\lambda t}\gamma^2 + \sigma^2 \frac{e^{2\lambda t}-1}{2\lambda}$.

Invece di lavorare con $\lambda < 0$ si preferisce $\lambda > 0$, di conseguenza

$$dX_t = -\lambda X_t dt + \sigma W_t \tag{2.1.8}$$

con equazione integrale associata

$$X(t) = X_0 - \lambda \int_0^t X(s) ds + \sigma W_t \tag{2.1.9}$$

e soluzione

$$X(t) = X_0 e^{-\lambda t} + \sigma \int_0^t e^{-(t-s)\lambda} dW_s \tag{2.1.10}$$

che risulta essere distribuita come una $\mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2\lambda}\right)$ per $t \to +\infty$. ■

Stochastic Differential Equations **a.a. 2016-17**

Lezione del 01/03/2017

Prof: Luciano Tubaro *Scritto da: Giulia Bertagnolli*

2.2 Brownian Bridge

Un altro esempio di equazione la cui soluzione si può trovare direttamente è il Browniano Bridge

$$\begin{cases} dX(t) = -\dfrac{X(t)-b}{T-t}dt + W_t & (2.2.1a) \\ X(0) = a & (2.2.1b) \end{cases}$$

La sua equazione integrale assocaita è

$$X(t) = a - \int_0^t \frac{X(s)-b}{T-s}ds + W_t. \tag{2.2.2}$$

Ponendo $y(t) = X(t) - W_t$ si ha

$$\begin{aligned} y(t) &= -\int_0^t \frac{y(s)+W_s-b}{T-s}ds \\ &= -\int_0^t \frac{y(s)-b}{T-s}ds - \int_0^t \frac{W_s}{T-s}ds \end{aligned}$$

Derivando

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -\frac{y(t)-b}{T-t} - \frac{W_t}{T-t} \\ \dot{y}(t) + \frac{y(t)-b}{T-t} &= -\frac{W_t}{T-t} \\ \frac{1}{T-t}\dot{y} + \frac{y(t)-b}{(T-t)^2} &= -\frac{W_t}{(T-t)^2} \end{aligned}$$

con $t \in [0, \widetilde{T}]$ e $\widetilde{T} < T$, per evitare la singolarità in $t = T$.

Con passaggi simili a quelli già visti

$$y(t) = b + \frac{(a-b)(T-t)}{T} - (T-t)\int_0^t \frac{W_s}{(T-s)^2}ds$$

e

$$X(t) = b + \frac{(a-b)(T-t)}{T} + W_t - (T-t)\int_0^t \frac{W_s}{(T-s)^2}ds \tag{2.2.3}$$

per $t \in [0, t)$.

Se $t \to T$, allora $b + \frac{a-b}{T}(T-t) \to b$, $W_t \to W_T$ e, usando de l'Hôpital $\frac{\int_0^t \frac{W_s}{(T-s)^2}ds}{\frac{1}{T-t}} \to W_T$, da cui

$$\lim_{t\to T} X(t) = b.$$

■

Misurabilità. Sia π una partizione $0 = s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n = t$ dell'intervallo $[0,t]$. Con $\pi \to \infty$ si intende che il numero di punti $s_0, \dots s_n$ va all'infinito producendo partizione via via più fini, i.e. $|\pi| = max_{i \in \{0,n-1\}} |t_{i+1} - t_i| \to 0$. Sia inoltre $f \in \mathcal{C}^1$

$$
\begin{aligned}
\int_0^t f(s) dW_s &= \lim_{\pi \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \\
&\overset{(1)}{=} f(t)W_t - \lim_{\pi \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_{i+1}}(f(t_{i+1} - f(t_i))) \\
&\overset{(2)}{=} f(t)W_t - \int_0^t W_s f'(s) ds
\end{aligned}
$$

ove in (1) abbiamo integrato per parti e in (2), per l'ipotesi su f, il limite esiste ed è proprio l'integrale di Riemann-Stieltjes.

Possiamo arrivare alla soluzione anche seguendo l'Oksendal, [Oks13, pag.22], infatti, per un qualsiasi processo W_t nullo in 0 $W_t = \int_0^t f(s) dW_s$ con $f(s) = 1$ e

$$
\int_0^t f(s) dW_s
$$

Stochastic Differential Equations	**a.a. 2016-17**

Lezione del 03/03/2017

Prof: Luciano Tubaro — *Scritto da: Giulia Bertagnolli*

2.2.1 Generalizzazione del Brownian Bridge

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(t)W_t \tag{2.2.4}$$
$$X(0) = X_0 \tag{2.2.5}$$

con $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, che può non essere lineare; ma anche $b : [0, T]\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Idem per σ.

L'equazione integrale associata è

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))dW_s \tag{2.2.6}$$

in cui l'ultimo termine a destra dell'uguale è un processo stocastico che definiremo in seguito.

Vediamo un caso particolare nel seguente esempio

Esempio 2.1. Sia W_t un processo di Wiener, ma anche un qualsiasi processo tale che $W_0 = 0$. Allora

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t \tag{2.2.7}$$

Sia $\pi : 0 = s_0 < \cdots < s_n = t$ una partizione dell'intervallo $[0, t]$ e consideriamo le somme

$$s_\pi = \sum_{i=0}^{n-1} W_{s_i}(W_{s_{i+1}} - W_{s_i})$$
$$S_\pi = \sum_{i=0}^{n-1} W_{s_{i+1}}(W_{s_{i+1}} - W_{s_i})$$

dopodichè ne prendiamo la differenza e la somma

$$S_\pi - s_\pi = \sum_{i=0}^{n-1}(W_{s_{i+1}} - W_{s_i})^2$$
$$s_\pi + s_\pi = W_t^2.$$

Per $t = \lim_{\pi\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1}(W_{s_{i+1}} - W_{s_i})^2$, in L^2 (cfr. Exercise 2.17 [Oks13]). Da cui

$$S_\pi = \frac{1}{2}(S_\pi + s_\pi + S_\pi - s_\pi) \to \frac{W_t^2 + t}{2}$$
$$s_\pi = \frac{1}{2}\left(S_\pi + s_\pi - (S_\pi - s_\pi)\right) \to \frac{W_t^2 - t}{2}$$

Osservazione 2.1. Nel considerare $\int_0^t W_s(\omega)dW_s(\omega)$ come limite delle somme $\sum_{i=0}^{n-1} W_{s_i^*}(\omega)(W_{s_{i+1}} - W_{s_i})(\omega)$ con $s_i^* \in [s_i, s_{i+1}]$ fa differenza dove il punto s_i^* è preso; dato $\alpha \in [0, 1]$

$$s_\alpha = (1 - \alpha)s_i + \alpha s_{i+1}.$$

Itô sceglie $\alpha = 0$ e, di conseguenza s_π che, tra le due, è una martingala.

In questa lezione vedremo la definizione 6.1 del [Bal00], riportata in (3.1).

3 Integrale stocastico

3.1 Definizione 6.1 Baldi

Sia $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (B_t)_t, \mathbb{P})$ un moto browniano fissato.

Definizione 3.1 (6.1 Baldi)**.** Indichiamo con $\Lambda^p_B([\alpha,\beta])$ lo spazio delle classi di equivalenza di processi reali $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{\alpha \le t \le \beta}, (X_t)_{\alpha \le t \le \beta}, \mathbb{P})$, progressivamente misurabili e tali che

(i) $\mathbb{P}\left(\int_\alpha^\beta |X_s|^p ds < +\infty\right) = 1.$

Con $M^p_B([\alpha,\beta])$ indichiamo invece lo spazio delle classi d'equivalenza di processi progressivamente misurabili tali che

(i') $\mathbb{E}\left(\int_\alpha^\beta |X_s|^p ds\right) < +\infty.$

Si noti che la filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$ è quella del processo di Wiener. Di conseguenza X_t risulta adattato a W_t ($\mathcal{F}^X_t \subseteq \mathcal{F}_t$).

Poiché in queste definizioni il processo di Wiener B_t (da noi indicato con W_t) è fissato, ometteremo il pedice nella notazione. Inoltre nella pratica $p = 2$, mentre l'intervallo di tempi da noi considerato è $[0,T]$ per cui utilizzeremo la notazioni $\Lambda^2([0,T])$ e $M^2([0,T])$ o, in breve Λ^2, M^2.

Ricordiamo inoltre che un processo X è detto *misurabile* se l'applicazione $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ è misurabile su $([0,T] \times \Omega, \mathcal{B}_T \otimes \mathcal{F})$, mentre si dice *progressivamente misurabile* se per ogni $t \in [0,T]$ l'applicazione $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ è misurabile su $([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}_t \otimes \mathcal{F})$.

Abbiamo già visto che per una classe di processi $X_t \in \mathcal{C}^1 \cap M^2$ l'integrale

$$\int_0^T X_s dW_s$$

è definibile traiettoria per traiettoria, ossia

$$\omega \to \int_0^T X(s,\omega) dW(s,\omega) = X_T W_T - X_0 W_0 - \int_0^T W_s X'_s ds$$

è l'integrale per parti.

Stochastic Differential Equations **a.a. 2016-17**

Lezione del 10/03/2017

Prof: Luciano Tubaro *Scritto da: Giulia Bertagnolli*

3.2 Integrale Stocastico

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e sia X_t una successione di variabili casuali $\mathcal{C}^1$. Sia inoltre W_t un processo di Wiener

$$\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right) \xrightarrow[\pi \to \infty]{} \int_0^T X_t dW_t \coloneqq X_T W_T - \int_0^T W_t X'(t) dt \tag{3.2.1}$$

Finora il fatto che W_t sia di Wiener non è stato utilizzato, sarebbe bastato qualsiasi processo nullo nell'origine; ma prendiamo ad esempio $X_t(\omega) = X(\omega)\varphi(t)$ con φ BV, allora l'integrale

$$\int_0^T X_s dW_s = X \int_0^T \varphi(s) dW_s = XY \tag{3.2.2}$$

con $Y = \int_0^T \varphi(s) dW_s$ è una variabile casuale.

Ora, per poter calcolare il valore d'aspettazione $\mathbb{E}(XY)$ dobbiamo fare delle ipotesi sulla relazione tra X e Y, i.e. tra X e W. Partiamo dalle somme di Riemann e vediamo due diverse ipotesi

Ipotesi 1). Supponiamo che X_{t_i} siano indipendenti dagli incrementi $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$, allora

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right) \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(X_{t_i}) \mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = 0$$

poichè gli incrementi di un processo di Wiener hanno media nulla.

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right) \right)^2 \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[(X_{t_i}^2)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \right] + \tag{3.2.3}$$

$$\sum_{i \neq j} \mathbb{E}\left[X_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) X_{t_j}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \right] \tag{3.2.4}$$

facciamo un'ipotesi aggiuntiva

Ipotesi 2). X_t adattato alla filtrazione del processo di Wiener, i.e. sia

$$\mathcal{F}_t^W \coloneqq \sigma \left\{ W_s : s \leq t \right\}$$

la filtrazione di W_t allora $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t^W$ e quindi $X_t(\omega)$ è misurabile rispetto a $\mathcal{F}_t^W$. Essendo $\mathcal{F}_t^W$ indipendente dagli incrementi $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ si ha che l'Ipotesi 1) implica Ipotesi 2). Abbiamo così capito perché nella

Def. (3.1) si richieda X_t adattato alla filtrazione di W_t. A questo punto supponendo $i < j$ in (3.2.4) $X_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})X_{t_j}$ è misurabile rispetto a $\mathcal{F}^W_{t_j}$ ed è indipendente da $W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$, di conseguenza abbiamo il prodotto dei valori attesi e, di conseguenza (3.2.4) è uguale a zero.

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)\right)^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[(X_{t_i}^2)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right] \tag{3.2.5}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[(X_{t_i}^2)\right] \mathbb{E}\left[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right] \tag{3.2.6}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[(X_{t_i}^2)\right] (t_{i+1} - t_i). \tag{3.2.7}$$

Resta da vedere che

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)\right)^2\right] \to \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X_s dW_s\right)^2\right] \tag{3.2.8}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[(X_{t_i}^2)\right] (t_{i+1} - t_i) \to \mathbb{E}\left[\int_0^T X_s^2 ds\right] = \int_0^T \mathbb{E}\left[X_s^2\right] ds. \tag{3.2.9}$$

Stochastic Differential Equations	**a.a. 2016-17**

Lezione del 15/03/2017

Prof: Luciano Tubaro — *Scritto da: Giulia Bertagnolli*

Considerazioni sulla definizione 6.1 del [Bal00].

Definizione 3.2 (Processo di Wiener)**.** Definiamo un processo di Wiener come una 5-upla

$$W = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (W_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$$

ove $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, filtrazione associata al processo, è *non anticipante*[2] e $\mathcal{F}_t^W \subset \mathcal{F}_t$, mentre la successione di variabili $(W_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}$ devono soddisfare le seguenti condizioni:

i. $W_0 = 0$ q.c.

ii. gli incrementi sono indipendenti, i.e. $\forall\ 0 \leq s < t\ \ W_t - W_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$

iii. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

Osservazione 3.1.

- Nel caso in cui si scelga la filtrazione naturale $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$ allora la si può omettere nella definizione.
- Non vi è la continuità delle traiettorie
- la ii. può anche essere scritta come $\mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t - W_s) = 0$ da cui $\mathbb{E}(W_t|\mathcal{F}_s) = W_s$, ossia W_t è una **martingala**.

Considerazioni su $M_W^p([0,T])$ X_t è (progressivamente) misurabile nella coppia (t, ω), per abbiamo la $\sigma-$algebra $\mathcal{B}(0,T) \bigotimes \mathcal{F}_T$ e la misura prodotto[3] $\lambda \bigotimes \mathbb{P}$.

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T |X_s|^p\, ds\right) < +\infty$$

$$\int_{[0,T]\times\Omega} |X_s|^p\, (ds, d\mathbb{P}) < +\infty$$

dunque $M_W^p([0,T]) \subset L^p([0,T] \times \Omega)$.

Considerazioni su $\lambda_W^p([0,T])$ Abbiamo

$$\int_0^T |X_s|^p\, ds < +\infty$$

quasi certamente, per cui $M_W^p([0,T]) \subset \lambda_W^p([0,T])$.

[2] Un processo adattato ad una filtrazione non anticipante è spesso detto non anticipante a sua volta.
[3] λ, misura di Lebesgue

Stochastic Differential Equations **a.a. 2016-17**

Lezione del 17/03/2017

Prof: Luciano Tubaro *Scritto da: Giulia Bertagnolli*

4 La formula di Itô

4.1 La "*ricetta*"

Come nel caso ordinario di integrali di Riemann, in cui non si usa la definizione per svolgere i calcoli, bensì il teorema fondamentale del calcolo e la *chain rule*, così anche nel caso stocastico esiste una versione di Itô della chain rule, chiamata *formula di Itô*.

In questa lezione vediamo l'operatività della formula, come fosse una "*ricetta*" senza enunciare il teorema in maniera rigorosa.

Sia W_t un processo di Wiener e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2$. Allora $f(W_t)$ è un nuovo processo e, data una partizione $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$

$$\begin{aligned}
f(W_t) - f(W_0) &\overset{(*)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(W_{t_{i+1}}) - f(W_{t_i}) \right) \\
&\overset{(**)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} f'(W_{t_i}) \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f''(W_{t_i}) \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right)^2 + \text{ errore}
\end{aligned}$$

ove (*) segue dal fatto che il termine di destra è una serie telescopica, mentre (**) è lo sviluppo in serie di Taylor.

Inoltre abbiamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1} f'(W_{t_i}) \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right) \xrightarrow[L^2]{} \int_0^t f'(W_s) dW_s \\
&\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f''(W_{t_i}) \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right)^2 \xrightarrow[\mathbb{P}]{} \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds
\end{aligned}$$

Ne segue una prima *formula di Itô*

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds. \tag{4.1.1}$$

Esempio 4.1. Prendendo $f(x) = x^2$, da cui $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$

$$\begin{aligned}
W_t^2 &= \int_0^t 2W_s dW s + \frac{1}{2} \int_0^t 2ds \\
&= 2 \int_0^t W_s dW s + t
\end{aligned}$$

o, in con la notazione differenziale

$$d(W_t^2) = 2W_t dW_t + dt$$

Integrando su $[0,T]$

$$\begin{aligned}\int_0^T d(W_t^2) &= W_T^2 - W_0^2 \\ &= 2\int_0^T W_s dWs + T\end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^T W_t d(W_t) = \frac{W_T^2 - T}{2}. \tag{4.1.2}$$

■

Sia ora $Y_t = Y_0 + \int_0^t A_s ds + \int_0^t Z_s dW_s$ con $Y_0 = Y(0)$, A_t, Z_t processi dati. Il primo integrale è alla Stiljies mentre il secondo è un integrale di Itô. Allora la (4.1.1), in forma differenziale, diventa

$$df(Y_t) = f'(Y_t)dY_t + \frac{1}{2}f''(Y_t)(dY_t)^2 \tag{4.1.3}$$

ove $(dY_t)^2$ è calcolato in accordo alle regole

$$\overbrace{dt \cdot dt}^{\text{ordine } 2} = \overbrace{dt \cdot dW_t}^{\text{ordine} \frac{3}{2}} = \overbrace{dW_t \cdot dt}^{\text{ordine} \frac{3}{2}} = 0 \tag{4.1.4a}$$

$$dW_t \cdot dW_t = dt. \tag{4.1.4b}$$

Con la notazione integrale

$$f(Y_t) - f(Y_0) = \int_0^t f'(Y_s)A(s)ds + \int_0^t f'(s)Z_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Y_s)Z_s^2 ds. \tag{4.1.5}$$

Vedremo più avanti di formalizzare questa formula.

Stochastic Differential Equations **a.a. 2016-17**

Lezione del 22/03/2017

Prof: Luciano Tubaro *Scritto da: Giulia Bertagnolli*

Vediamo un esercizio

$$X_t = f(t, W_t) = e^{\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t} \tag{4.1.6}$$

evidentemente $X_0 = 1$. Applichiamo la formula di Itô

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + \cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(dx)(dt)} \\
\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dt \\
\frac{df(t,x)}{dt} &= \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)e^{\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t}dt + \sigma e^{\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t}dx + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t}dt \\
&= be^{\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t}dt + \sigma e^{\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t}dx
\end{aligned}$$

da cui

$$dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dW_t \tag{4.1.7}$$

in forma integrale

$$X_T - X_0 = b\int_0^T X_t dt + \sigma \int_0^T X_t dW_t$$

Possiamo anche vederlo in un altro modo: $Y_t = \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t$, $dY_t = \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t$ e $X_t = F(Y_t) = e^{Y_t}$. Allora,

$$\begin{aligned}
dX_t &= F'(Y_t)dY_t + \frac{1}{2}F''(Y_t)(dY_t)^2 \\
&= X_t dY_t + \frac{1}{2}X_t(dY_t)^2 \\
&= bX_t dt + \sigma X_t dW_t
\end{aligned}$$

giungendo alla stessa soluzione.

Abbiamo finora dimostrato l'esistenza di una soluzione di (4.1.7). Per l'unicità della soluzione procediamo così

Consideriamo una soluzione di (4.1.7) che chiameremo ancora X_t e generalizziamo a $X(0) = X_0$. Riscriviamo (4.1.7)

$$\begin{aligned}
X_t &= X_0 e^{\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t} \\
e{-}\sigma W_t X_t &= X_0 e^{\left(b-\frac{\sigma^2}{2}\right)t}
\end{aligned}$$

prendiamo la (eventuale) soluzione X_t e, dopo averla moltiplicata per $e^{-\sigma W_t}$, ne consideriamo il differenziale ricordando che si tratta di un prodotto di processi stocastici

$$\begin{aligned}
d\left(X_t e^{-\sigma W_t}\right) &= dX_t e^{-\sigma W_t} + \\
&+ X_t de^{-\sigma W_t} + \\
&+ dX_t de^{-\sigma W_t} \\
d\left(X_t e^{-\sigma W_t}\right) &= bX_t e^{-\sigma W_t} dt + \cancel{\sigma X_t e^{-\sigma W_t} dW_t} + \\
&\cancel{-\sigma X_t e^{-\sigma W_t} dW_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t e^{-\sigma W_t} dt + \\
&- \sigma^2 X_t e^{-\sigma W_t} dt \\
d\left(X_t e^{-\sigma W_t}\right) &= \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right) e^{-\sigma W_t} dt.
\end{aligned}$$

Chiamando $Y_t = X_t e^{-\sigma W_t}$

$$dY_t = \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right) Y_t dt$$

da cui, risolvendo, otteniamo l'unicità

$$\begin{aligned}
Y_t &= e^{\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} Y_0 \\
X_t e^{-\sigma W_t} &= e^{\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} X_0.
\end{aligned}$$

■

Osservazione 4.1.

- (4.1.7) è detto *moto browniano geometrico* e σ *volatilità.*
- Nella realtà σ non è costante.
- Dato $X_0 > 0$ tutte le traiettorie sono positive.

Lezione del 24/03/2017

Prof: Luciano Tubaro *Scritto da: Giulia Bertagnolli*

Calcoliamo media e varianza di $\int_0^T X_t dW_t$ con W_t processo di Wiener e $X_t \in M^2([0,T]) \cap \mathcal{C}^1([0,T])$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T X_t dW_t\right] = 0 \tag{4.1.8}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X_t dW_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T X_t^2 dt\right] \tag{4.1.9}$$

L'esercizio svolto si trova sul pagina del corso `http://www.science.unitn.it/~tubaro/corso5/lez3.pdf`.

□

Osservazione 4.2.

- La (4.1.9) ci permetterà di dimostrare che $M^2 \cap \mathcal{C}^1([0,T])$ è denso in M^2.
- Niente assicura la continuità delle traiettorie $\omega \to \left(\int_0^T X_t dW_t\right)(\omega)$ per cui avremo necessità di un rappresentante continuo (se esiste) nella classe di equivalenza. Si sfrutterà la proprietà di martingala, dimostrata nella prossima lezione.

Stochastic Differential Equations **a.a. 2016-17**

Lezione del 29/03/2017

Prof: Luciano Tubaro *Scritto da: xxx*

In questa lezione dimostreremo che l'integrale di Itô è una martingala.

Proposizione 1. *Sia $X_t \in M^2 \cap \mathcal{C}^1$ allora valgono:*

i.
$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_r dW_r \Big| \mathcal{F}_s\right] = \int_0^s X_r dW_r \tag{4.1.10}$$

ii.
$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X_r dW_r\right)^2 \Big| \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^s X_r^2 d_r \Big| \mathcal{F}_s\right] \tag{4.1.11}$$

Dimostrazione.
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^t X_r dW_r \Big| \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^s X_r dW_r + \int_s^t X_r dW_r \Big| \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^s X_r dW_r \Big| \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[\int_s^t X_r dW_r \Big| \mathcal{F}_s\right]
\end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^s X_r dW_r \Big| \mathcal{F}_s\right] &= \int_0^s X_r dW_r \\
\int_s^t X_r dW_r &= X_t W_t - X_s W_s - \int_s^t W_r X_r' dr \\
&= X_t W_t - X_s W_s \pm X_s W_t - \int_s^t W_r X_r' dr \\
&= X_s(W_t - W_s) + (X_t - X_s)W_t - \int_s^t W_r X_r' dr \\
&= X_s(W_t - W_s) + \left(\int_s^t X_r' dr\right) W_t - \int_s^t W_r X_r' dr \\
&= X_s(W_t - W_s) + \int_s^t (W_t - W_r) X_r' dr \\
\mathbb{E}\left[\int_s^t X_r dW_r \Big| \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[X_s(W_t - W_s) + \int_s^t (W_t - W_r) X_r' dr \Big| \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_s(W_t - W_s) \Big| \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[\int_s^t (W_t - W_r) X_r' dr \Big| \mathcal{F}_s\right] \\
&= X_s \mathbb{E}\left[(W_t - W_s) \Big| \mathcal{F}_s\right] + \int_s^t \mathbb{E}\left[(W_t - W_r) X_r' \Big| \mathcal{F}_s\right] dr
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left[(W_t - W_s)\middle|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(W_t - W_s)\right] = 0$$

$$\int_s^t \mathbb{E}\left[(W_t - W_r)X'_r\middle|\mathcal{F}_s\right] dr = \int_s^t \mathbb{E}\left[\underbrace{\mathbb{E}\left[(W_t - W_r)X'_r\middle|\mathcal{F}_r\right]}_{X'_r\mathbb{E}(W_t - W_r)=0}\mathcal{F}_s\right] dr$$
$$= 0$$

La (i.) è quindi verificata

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_r dW_r\middle|\mathcal{F}_s\right] = \int_0^s X_r dW_r \tag{4.1.12}$$

Per quanto riguarda la dimostrazione di (ii.) è data per esercizio[4]. □

Esercizio 4.1.

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X_r dW_r\right)^2 - \int_0^t X_r^2 d_r\middle|\mathcal{F}_s\right] = \left(\int_0^s X_r dW_r\right)^2 - \int_0^s X_r^2 d_r \tag{4.1.13}$$

cioè $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X_r dW_r\right)^2 - \int_0^t X_r^2 d_r\middle|\mathcal{F}_s\right]$ è ancora una martingala. ■

Ricordiamo il seguente

Teorema 2 (Teorema di Meyer)**.** *Se M_t è una martingala allora esiste un processo A_t adattato, crescente tale per cui*

$$M_t^2 - A_t$$

è una martingala. Nel caso in di martingale continue il processo A_t viene indicato con $\langle M\rangle_t$ e chiamato Crochèt di Meyer.

□

Vediamo ora come è possibile estendere l'integrale di Itô al tempo t

$$I(X)_t = \int_0^t X_r dW_r \tag{4.1.14}$$

a $\{X_t\} \in M^2$.

Proposizione 3. *È possibile approssimare ogni processo $X_t \in M^2$ con una successione di processi in $M^2 \cap \mathcal{C}^1$, in altre parole $M^2 \cap \mathcal{C}^1$ è denso in M^2.*

Dimostrazione. Sia $X_t \in M^2 \cap \mathcal{C}^1$ Di $I(X)_t$ sappiamo

i. che è un processo di media 0

ii. calcolarne la **varianza** e questa sarà la **chiave** della dimostrazione

iii. che è una martingala e conosciamo il processo crescente A_t associato a $I^2(X)_t$: $A_t = \int_0^t X_r^2 dr$

[4]Si trova svolto sul sito del Prof. `http://www.science.unitn.it/~tubaro/corso5/lez3.pdf`.

Prendiamo perciò una successione $\left\{X_t^{(n)}\right\}_n$ in $M^2 \cap \mathcal{C}^1$ tale che $X_t^{(n)} \to X_t \in M^2$ nella norma di $L^2([0,T] \times \Omega)$.
Ogni successione convergente è di Cauchy, segue $X_t^{(n)} - X_t^{(m)} \to 0$ da un certo m in poi, sempre nella stessa norma, i.e.

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(X_r^{(n)} - X_r^{(m)}\right)^2 dr\right] \to 0$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\int_0^t X_r^{(n)} dW_r - \int_0^t X_r^{(m)} dW_r &= \int_0^t \left(X_r^{(n)} - X_r^{(m)}\right) dWr \\
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X_r^{(n)} dW_r - \int_0^t X_r^{(m)} dW_r\right)^2\right] &\overset{(*)}{=} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \left(X_r^{(n)} - X_r^{(m)}\right) dWr\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(X_r^{(n)} - X_r^{(m)}\right)^2 dr\right] \to 0
\end{aligned}$$

ove in (*) abbiamo usato la chiave.

Quindi $\int_0^t X_r^{(n)} dW_r$ è una successione di Cauchy, $L^2(\Omega)$ è uno spazio completo per cui otteniamo che esiste il limite per $n \to \infty$ di $\int_0^t X_r^{(n)} dW_r$. $\square$

Anche per il limite valgono le proprietà viste finora per l'integrale di Itô.

Stochastic Differential Equations **a.a. 2016-17**

Lezione del 31/03/2017

Prof: Luciano Tubaro *Scritto da: Giulia Bertagnolli*

Relazione tra processi stocastici ed equazioni alle derivate parziali.

Cerchiamo una soluzione $u(x)$ al seguente problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in \Theta, \text{ aperto} \\ u = f & x \in \partial\Theta \end{cases} \tag{4.1.15}$$

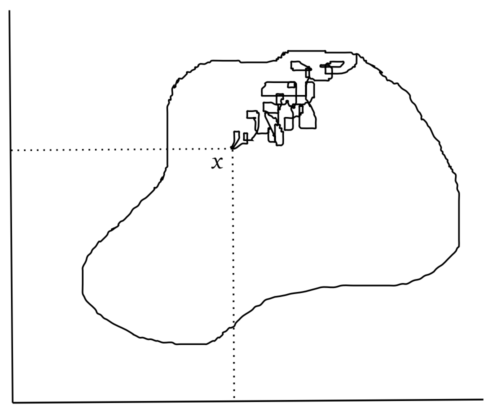

Figura 4.1

Fissiamo un punto x da cui facciamo partire un moto Browniano bidimensionale $x + W_t$ con $W_t \in \mathbb{R}^2$. Per ogni traiettoria esiste $t \in [0, +\infty)$ in cui la traiettoria toccherà la frontiera $\partial\Theta$ per la prima volta, indichiamo questo tempo con $\tau_x(\omega)$. Di conseguenza il punto "toccato" sarà $x + W_{\tau_x}$.

Sia $f(x + W_{\tau_x})$ una funzione del punto aleatorio sulla frontiera, è una variabile casuale e possiamo perciò calcolarne il valore d'aspettazione; allora (come vedremo in seguito) esiste un teorema che afferma

$$u(x) = \mathbb{E}\left[f\left(x + W_{\tau_x}\right)\right] \tag{4.1.16}$$

Il problema si può generalizzare a

$$\begin{cases} Lu = 0 & x \in \Theta, \text{ aperto} \\ u = f & x \in \partial\Theta \end{cases} \tag{4.1.17}$$

con L operatore ellittico del secondo ordine

$$Lv(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} \tag{4.1.18}$$

ove $A = \{a_{ij}\}_{i,j}$ funzioni date e $b = (b_1, \dots, b_n)$. Inoltre A è semidefinita positiva, i.e. $\langle A\xi, \xi\rangle \geq 0$ per ogni ξ e $\langle A\xi, \xi\rangle \geq \lambda|\xi|^2$, $\lambda > 0$ (operatore ellittico).

Poniamo $\sigma = \sqrt{A}$

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \\ X_0 = x \in \Theta \end{cases}$$

$$X_t = x + \int_0^t b(X_r)dr + \int_0^t \sigma(X_r)dW_r \tag{4.1.19}$$

(4.1.19) è un processo di diffusione che dipende da A e b. Come prima, vale (4.1.16).

Curiosità: nel caso di equazioni sstocastiche, poichè si considera $\sigma = \sqrt{A}$, si può parlare di soluzioni anche nel caso ipo-ellittico in cui A è solamente semidefinita positiva, senza ulteriori vincoli (generalizzazione Bonaccorsi, Mazzucchi).

Stochastic Differential Equations	**a.a. 2016-17**

Lezione del 5/04/2017

Prof: Luciano Tubaro — *Scritto da: Giulia Bertagnolli*

Alcune definizioni

Definizione 4.1.

i. **Convoluzione.** Siano $f,\ g \in L^1(\mathbb{R})$ definiamo la convoluzione di f e g:
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$$

ii. **Supporto compatto.** Una funzione è a supporto compatto, i.e. $f \in \mathcal{C}_C^\infty$ se al di fuori di un compatto K è nulla e $\mathcal{C}^\infty(K)$.

Esempio 4.2. Esempio di una funzione in $\mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R})$
$$\rho(x) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-x^2}} & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{4.1.20}$$
con costante c tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1$.

Sia $f \in L^p$ allora
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x-y)f(y)dy.$$

Introduciamo , per $\epsilon > 0$
$$\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \tag{4.1.21}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\epsilon(x)dx = 1$$
il supporto di $\rho_\epsilon(x)$ è $\left|\frac{x}{\epsilon}\right| \leq 1$ e per $\epsilon \to 0$ sia ha che $\rho_\epsilon \to \delta$ di Dirac.

Si osservi che $f * \rho_\epsilon \xrightarrow{\text{in } L^p} f$, dunque abbiamo una successione di funzioni $\mathcal{C}^{+\infty}$ che approssimano f. Inoltre se f ha supporto compatto, anche $f * \rho_\epsilon$ lo ha. ■

Sia $X_t \in \Lambda^2$ e facciamo la convoluzione con la ρ_ϵ definita in (4.1.21) in modo da regolarizzare il processo traiettoria per traiettoria ed ottenere così un processo continuo (si veda la dimostrazione [Bal00, Lemma 6.2]).

Usiamo un piccolo accorgimento:
$$(J_\epsilon X)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\epsilon(t-s-\epsilon)X_s(\omega)ds \tag{4.1.22}$$
l'aggiunta dell'ϵ implica che $t-2\epsilon \leq s \leq t$ ossia fa in modo che s non viaggi fino a $t+\epsilon$ e conserviamo quindi per X_s l'essere adattato alla filtrazione. Abbiamo inoltre che $(J_\epsilon X)(\cdot) \to X(\cdot)$, ossia
$$\int_0^T [(J_\epsilon X)(t) - X_t(\omega)]^2 dt \xrightarrow{\text{q.c.}} 0 \qquad \epsilon \to 0. \tag{4.1.23}$$

Stochastic Differential Equations	**a.a. 2016-17**

Lezione del 7/04/2017

Prof: Luciano Tubaro — *Scritto da: Giulia Bertagnolli*

Rispetto a M^2, Λ^2 rilassa la condizione $\mathbb{E}\left(\int_\alpha^\beta |X_s|^p ds\right) < +\infty$ a $\mathbb{P}\left(\int_\alpha^\beta |X_s|^p ds < +\infty\right) = 1$ e abbiamo che la prima implica la seconda, dunque $M^2 \subset \Lambda^2$.

L'estensione della definizione dell'integrale di Itô a $\Lambda^2 \cap \mathcal{C}^1$ è perciò naturale, poichè l'insieme

$$\left\{\omega \in \Omega : \int_0^T |X_s(\omega)|^2 = +\infty\right\}$$

ha misura nulla.

Dimostriamo ora che

Proposizione 4. $\Lambda^2 \cap \mathcal{C}^1$ *è denso in* Λ^2.

Dimostrazione. La **chiave** in questo caso sarà la seguente disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_0^T X_s dW_s\right| > \epsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\int_0^T X_s^2 ds > \rho\right) + \frac{\rho}{\epsilon^2} \tag{4.1.24}$$

che verrà dimostrata in seguito. □

Dando momentaneamente per buono il fatto che la *chiave* usata nella precedente dimostrazione sia valida per processi in $\Lambda^2 \cap \mathcal{C}^1$, vediamo la seguente

Proposizione 5. *La disuguaglianza*

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_0^T X_s dW_s\right| > \epsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\int_0^T X_s^2 ds > \rho\right) + \frac{\rho}{\epsilon^2} \tag{4.1.25}$$

è verificata per ogni $X \in \Lambda^2$.

Dimostrazione. □

Stochastic Differential Equations **a.a. 2016-17**

Lezione del 12/04/2017

Prof: Luciano Tubaro *Scritto da: Giulia Bertagnolli*

Dimostriamo ora la disuguaglianza ampiamente utilizzata finora

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_0^T X_s dW_s\right| > \epsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\int_0^T X_s^2 ds > \rho\right) + \frac{\rho}{\epsilon^2} \tag{4.1.26}$$

per ogni processo $X_t \in \Lambda^2 \cap \mathcal{C}^1$ e $\forall \epsilon, \rho > 0$.

Dimostrazione. Per ogni $t \in [0,T]$ definiamo il processo $Y_\rho(t)$ come

$$Y_\rho(t) = \begin{cases} X_t & \text{se } \int_0^T X_r^2 dr \leq \rho \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{4.1.27}$$

$Y_\rho(t) \in M^2$ per cui valgono le proprietà

i. $\mathbb{E}\left(\int_0^T Y_\rho(r) dW_r\right) = 0$

ii. $\mathbb{V}ar\left(\int_0^T Y_\rho(r) dW_r\right) = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T Y_\rho(r) dW_r\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T Y_\rho(r)^2 dr\right]$.

Poniamo inoltre $A_\rho = \left\{\omega : \int_0^T X_r^2 dr \leq \rho\right\}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\int_0^T X_s dW_s\right| > \epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\int_0^T X_s dW_s\right| > \epsilon \cap A_\rho\right) + \mathbb{P}\left(\left|\int_0^T X_s dW_s\right| > \epsilon \cap A_\rho^C\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\left|\int_0^T X_s dW_s\right| > \epsilon \cap A_\rho\right) + \mathbb{P}\left(A_\rho^C\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left|\int_0^T Y_\rho(s) dW_s\right| > \epsilon \cap A_\rho\right) + \mathbb{P}\left(A_\rho^C\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\left|\int_0^T Y_\rho(s) dW_s\right| > \epsilon\right) + \mathbb{P}\left(A_\rho^C\right)
\end{aligned}$$

Ora,

$$\mathbb{P}\left(A_\rho^C\right) = \mathbb{P}\left(\int_0^T X_s^2 ds > \rho\right) \tag{4.1.28}$$

costituisce il primo termine della disequazione 4.1.25. Usando la disuguaglianza di Chebyshev

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\int_0^T Y_\rho(s)dW_s\right| > \epsilon\right) &\leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T Y_\rho(s)dW_s\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_0^T Y_\rho(r)^2 dr\right]\end{aligned}$$

Ricordando la definizione di $Y_\rho(r)$ vediamo che

$$Y_\rho^2(t)(\omega) = \begin{cases} X_t^2(\omega) & \text{su } \left\{\omega : \int_0^T X_r^2(\omega)dr \leq \rho\right\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per cui

$$\int_0^T Y_\rho(r)^2 dr \leq \rho. \tag{4.1.29}$$

E abbiamo la tesi. □

Si veda `http://www.science.unitn.it/~tubaro/corso5/tub.pdf`, per chiarimenti sulla dimostrazione data dal Baldi [Bal00, Thm. 6.8].

Stochastic Differential Equations **a.a. 2016-17**

Lezione del 19/04/2017

Prof: Luciano Tubaro *Scritto da: Giulia Bertagnolli*

Di seguito indicheremo con $\mathbb{M} = M^2([0,T])$: da Def (3.1), $X \in \mathbb{M}$ è un processo progressivamente misurabile rispetto alla filtrazione del processo di Wiener $(\mathcal{F}_t)$. Finora abbiamo visto che per un tale $X \in \mathcal{M}$ valgono:

(i)
$$t \to \int_0^t X_s dW_s \tag{4.1.30}$$
è una martingala rispetto a $(\mathcal{F}_t)$ e posso sceglierla (all'interno della classe di equivalenza) continua.

(ii)
$$t \to \left(\int_0^t X_s dW_s\right)^2 - \int_0^t X_s^2 ds \tag{4.1.31}$$
è una martingala rispetto a $(\mathcal{F}_t)$.

Se $X \in \mathbb{\Lambda} = \Lambda^2([0,T])$ perdiamo qualcosa

(iii)
$$t \to \int_0^t X_s dW_s \tag{4.1.32}$$
è una martingala locale[5].

(iv) $\forall \rho, \epsilon > 0$ vale
$$\mathbb{P}\left(\left|\int_0^t X_s dW_s\right| > \epsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\int_0^t X_s^2 d_s > \rho\right) + \frac{\rho}{\epsilon^2} \tag{4.1.33}$$

$(\mathcal{F}_t)$ filtrazione non anticipante per W_t, allora

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t - W_s) = 0\\
&\mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t|\mathcal{F}_s) - \mathbb{E}(W_s|\mathcal{F}_s) = 0\\
&\mathbb{E}(W_t|\mathcal{F}_s) = W_s
\end{aligned}$$

e abbiamo la proprietà di martingala del processo di Wiener.

Da processo di Wiener a Martingala. Sia ora M_t una martingala rispetto a una filtrazione $(\mathcal{F}_t)$ a traiettorie continue. Sia inoltre $X \in \mathcal{C}^1 \cap M_M^2$. Sostituiamo il processo di Wiener con M_t e consideriamo l'integrale di Itô
$$\int_0^T X_s dM_s \tag{4.1.34}$$

[5] i.e. ho una successione crescente di tempi di arresto $(\tau_n)_n$ tali che il processo stoppato ad ogni tempo $(M_{t\wedge\tau_n})_t$ è una $(\mathcal{F}_t)_t$-martingala, Def (6.23) del [Bal00].

come limite delle somme

$$\sum_{i=0}^{n-1} X_{s_i}(M_{s_{i+1}} - M_{s_i}) = X_T M_T - X_0 M_0 - \sum_{i=0}^{n-1} M_{s_{i+1}}(X_{s_{i+1}} - X_{s_i}) \tag{4.1.35}$$

$$\to X_T M_T - X_0 M_0 - \int_0^T \dot{X}_s M_s ds \tag{4.1.36}$$

Denotiamo con A_t la variazione quadratica di M_t, per "π" $\to +\infty$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \underset{\mathbb{P}}{\to} A_t \tag{4.1.37}$$

A_t è un processo a traiettorie positive, crescenti, continue, che spesso è indicato anche con $\langle M \rangle_t$ (il *crochet di P.A. Meyer*). Si ha che

$$M_t^2 - A_t \text{ è una martingala} \tag{4.1.38}$$

$$\mathbb{E}((M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s) = A_t - A_s \tag{4.1.39}$$

Teorema 6.

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X_s dM_s\right) = 0 \tag{4.1.40}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X_s dM_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^T X_s^2 dA_s\right) \tag{4.1.41}$$

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t X_r dM_r \mid \mathcal{F}_s\right) = \int_0^s X_r dM_r \tag{4.1.42}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t X_r dM_r\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t X_r^2 dA_r \mid \mathcal{F}_s\right] \tag{4.1.43}$$

La dimostrazione delle uguaglianze (4.1.41) - (4.1.43 è riportata di seguito (credit: Prof. Tubaro).

Dimostrazione. La (4.1.40) è facile.
Per la (4.1.41) consideriamo

$$\Big(X_0\,(M_t - M_0) + \int_0^t (M_t - M_r)\,\dot{X}_r\,dr\Big)^2 =$$
$$X_0^2\,(M_t - M_0)^2 + 2X_0\,(M_t - M_0)\int_0^t (M_t - M_r)\,\dot{X}_r\,dr + \int_0^t\int_0^t (M_t - M_r)\,\dot{X}_r (M_t - M_\rho)\,\dot{X}_\rho\,dr\,d\rho$$

dove il secondo addendo è conveniente riscriverlo come

$$X_0\,(M_t - M_0)\int_0^t (M_t - M_r)\,\dot{X}_r\,dr = X_0\,\Big[\int_0^t (M_t - M_r)^2\,\dot{X}_r\,dr + \int_0^t (M_r - M_0)\,(M_t - M_r)\,\dot{X}_r\,dr\Big]$$

il cui valore di aspettazione risulta

$$\mathbb{E}\big[X_0\int_0^t (A_t - A_r)\,\dot{X}_r\,dr\big] = \mathbb{E}\big[-A_t\,X_0^2 + X_0\int_0^t X_r\,dA_r\big]$$

Il valore di aspettazione del primo più il secondo termine è quindi

$$\mathbb{E}(A_t\,X_0^2) + 2\,\mathbb{E}\big[-A_t\,X_0^2 + X_0\int_0^t X_r\,dA_r\big] = \mathbb{E}[-A_t\,X_0^2 + 2X_0\int_0^t X_r\,dA_r] = \mathbb{E}[\int_0^t X_r^2\,dA_r - \int_0^t (X_r - X_0)^2\,dA_r]$$

D'altra parte conviene riscrivere l'ultimo addendo (supponendo $r < \rho$)

$$(M_t - M_r)\,\dot{X}_r(M_t - M_\rho)\,\dot{X}_\rho = \dot{X}_r(M_t - M_\rho)^2\,\dot{X}_\rho + (M_\rho - M_r)\,\dot{X}_r(M_t - M_\rho)\,\dot{X}_\rho$$

da cui il valore di aspettazione risulta

$$\mathbb{E}(\dot{X}_r\,\dot{X}_\rho(A_t - A_\rho))$$

e quindi

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t\int_0^t (M_t - M_r)\,\dot{X}_r(M_t - M_\rho)\,\dot{X}_\rho\,dr\,d\rho\right] = 2\,\mathbb{E}\left[\int_0^t d\rho\int_0^\rho (M_t - M_r)\,\dot{X}_r(M_t - M_\rho)\,\dot{X}_\rho\,dr\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t\int_0^t (M_t - M_r)\,\dot{X}_r(M_t - M_\rho)\,\dot{X}_\rho\,dr\,d\rho\right] = 2\int_0^t d\rho\int_0^\rho \mathbb{E}(\dot{X}_r\,\dot{X}_\rho(A_t - A_\rho))\,dr$$

$$= 2\mathbb{E}\int_0^t (A_t - A_\rho)\,\dot{X}_\rho d\rho\int_0^\rho \dot{X}_r\,dr = 2\mathbb{E}\int_0^t (A_t - A_\rho)\,\dot{X}_\rho(X_\rho - X_0)d\rho = \mathbb{E}\int_0^t (A_t - A_\rho)\,\frac{d}{d\rho}(X_\rho - X_0)^2 d\rho$$

$$= \mathbb{E}\int_0^t (X_\rho - X_0)^2 dA_\rho$$

Sommando otteniamo

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t X_r\,dM_r\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\int_0^t X_r^2\,dA_r.$$

In quanto alla (4.1.42), dalla

$$\boxed{\int_s^t X_r\,dM_r = X_s(M_t - M_s) + \int_s^t (M_t - M_r)\,\dot{X}_r\,dr}$$

otteniamo

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^t X_r\,dM_r \mid \mathcal{F}_s\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_s^t X_r\,dM_r \mid \mathcal{F}_s\Big) + \int_0^s X_r\,dM_r$$

$$\mathbb{E}\Big(\int_s^t X_r\,dM_r \mid \mathcal{F}_s\Big) = \mathbb{E}\Big(X_s(M_t - M_s) + \int_s^t (M_t - M_r)\,\dot{X}_r\,dr \mid \mathcal{F}_s\Big)$$

$$= X_s\mathbb{E}(M_t - M_s) + \mathbb{E}\Big(\int_s^t (M_t - M_r)\,\dot{X}_r\,dr \mid \mathcal{F}_s\Big)$$

$$= 0 + \int_s^t \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\big((M_t - M_r)\,\dot{X}_r \mid \mathcal{F}_r\big) \mid \mathcal{F}_s\Big)\,dr$$

$$= \int_s^t \mathbb{E}\Big(X_r\mathbb{E}(M_t - M_r) \mid \mathcal{F}_s\Big)\,dr = 0$$

Infine per dimostrare la (4.1.43) si procede come per dimostrare la (4.1.41)

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t X_r\,dM_r\Big)^2 \mid \mathcal{F}_s\Big] = (\int_0^s X_r\,dM_r)^2 + 2\int_0^s X_r\,dM_r\,\mathbb{E}\Big[\int_s^t X_r\,dM_r \mid \mathcal{F}_s\Big] + \mathbb{E}\Big[\Big(\int_s^t X_r\,dM_r\Big)^2 \mid \mathcal{F}_s\Big]$$

$$= (\int_0^s X_r\,dM_r)^2 + \mathbb{E}\Big[\Big(\int_s^t X_r\,dM_r\Big)^2 \mid \mathcal{F}_s\Big]$$

perché il termine medio è nullo per la terza formula. Calcoliamo l'ultimo addendo:

$$\Big(X_s(M_t - M_s) + \int_s^t (M_t - M_r)\,\dot X_r\,dr\Big)^2 =$$
$$X_s^2(M_t - M_s)^2 + 2X_s(M_t - M_s)\cdot \int_s^t (M_t - M_r)\,\dot X_r\,dr + \Big(\int_s^t (M_t - M_r)\,\dot X_r\,dr\Big)^2$$

Abbiamo tre termini. Per il primo

$$\mathbb{E}(X_s^2(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s) = X_s^2\,\mathbb{E}(A_t - A_s \mid \mathcal{F}_s)$$

Per il secondo

$$X_s(M_t - M_s)\cdot \int_s^t (M_t - M_r)\,\dot X_r\,dr = X_s \int_s^t (M_t - M_r)^2\,\dot X_r\,dr + X_s \int_s^t (M_r - M_s)(M_t - M_r)\,\dot X_r\,dr$$

$$\int_s^t (A_t - A_r)\,\dot X_r\,dr = -(A_t - A_s)X_s + \int_s^t X_r\,dA_r$$

e quindi sommando i primi due termini abbiamo

$$\mathbb{E}\Big[X_s^2(M_t - M_s)^2 + 2X_s(M_t - M_s)\cdot \int_s^t (M_t - M_r)\,\dot X_r\,dr \mid \mathcal{F}_s\Big] =$$
$$= -E(A_t - A_s \mid \mathcal{F}_s)X_s^2 + 2X_s \int_s^t \mathbb{E}(X_r \mid \mathcal{F}_s)\,dA_r = \int_s^t \mathbb{E}((2X_sX_r - X_s^2) \mid \mathcal{F}_s)\,dA_r$$
$$= \int_s^t \mathbb{E}(X_r^2 \mid \mathcal{F}_s)\,dA_r - \int_s^t \mathbb{E}((X_r - X_s)^2 \mid \mathcal{F}_s)\,dA_r$$

Infine per l'ultimo termine

$$\Big(\int_s^t (M_t - M_r)\,\dot X_r\,dr\Big)^2 = 2\int_s^t d\rho \int_s^\rho (M_t - M_r)\,\dot X_r(M_t - M_\rho)\,\dot X_\rho\,dr$$

$$\mathbb{E}(\dot X_r\,\dot X_\rho(A_t - A_\rho) \mid \mathcal{F}_s)$$

$$\mathbb{E}\Big(\Big(\int_s^t (M_t - M_r)\,\dot X_r\,dr\Big)^2 \mid \mathcal{F}_s\Big) = 2\int_s^t d\rho \int_s^\rho \mathbb{E}(\dot X_r\,\dot X_\rho(A_t - A_\rho) \mid \mathcal{F}_s)\,dr$$
$$= \mathbb{E}\Big(\int_s^t (X_\rho - X_s)^2\,dA_\rho \mid \mathcal{F}_s\Big)$$

Il Teorema 6 è dimostrato. □

Osservazione 4.3. La (4.1.42) ci dice che l'integrale stocastico è anch'esso una martingala. Inoltre abbiamo

$$\mathbb{E}\left[\Big(\int_0^t X_r\,dM_r\Big)^2 - \int_0^t X_r^2\,dA_r \mid \mathcal{F}_s\right] = \Big(\int_0^s X_r\,dM_r\Big)^2 - \int_0^s X_r^2\,dA_r$$

Infatti

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\Big(\int_0^t X_r\,dM_r\Big)^2 - \int_0^t X_r^2\,dA_r \mid \mathcal{F}_s\right] &= \Big(\int_0^s X_r\,dM_r\Big)^2 - \int_0^s X_r^2\,dA_r \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\Big(\int_s^t X_r\,dM_r\Big)^2 + 2\int_0^s X_r\,dM_r \int_s^t X_r\,dM_r - \int_s^t X_r^2\,dA_r \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \Big(\int_0^s X_r\,dM_r\Big)^2 - \int_0^s X_r^2\,dA_r\end{aligned}$$

In altre parole la variazione quadratica associata all'integrale stocastico è

$$\Big\langle \int_0^t X_r\,dM_r \Big\rangle_t = \int_0^t X_r^2\,dA_r$$

Da Martingala a Semimartingala. Una *semimartingala* è un processo S_t tale che possa essere scritto come

$$S_t \coloneqq S_0 + V_t + M_t \tag{4.1.44}$$

ove M_t è una martingala e V_t un processo a variazione totale limitata, i.e. $\forall\omega$ esiste una costante $C(\omega) < \infty$ tale che $\sum_i |V_{t_{i+1}}(\omega) - V_{t_i}(\omega)| \leq C(\omega)$, entrambi adattati alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$. Supporremo, senza perdita di generalità, $S_0 = 0$. Si osservi che se la decomposizione (4.1.44) esiste, allora essa è unica. Possiamo inoltre definire

i. la variazione quadratica di S_t, la quale è unicamente determinata dalla componente martingala e il processo V_t non dà alcun contributo

$$\sum_{i=1}^{n-1}(S_{t_{i+1}} - S_{t_i})^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\big((V_{t_{i+1}} - V_{t_i}) + (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\big)^2 \xrightarrow[\mathbb{P}]{"\pi" \to +\infty} A_t$$

poiché sia $\sum_{i=1}^{n-1}(V_{t_{i+1}} - V_{t_i})^2$, sia $\sum_{i=1}^{n-1}(V_{t_{i+1}} - V_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})$ tendono a 0 in probabilità all'infittersi della partizione π.

ii. l'integrale rispetto a dS_t

$$\int_0^T X_t dS_t = \int_0^T X_t dV_t + \int_0^T X_t dM_t \tag{4.1.45}$$

ove il primo è un integrale di Stieltjes mentre il secondo è un integrale stocastico rispetto ad una martingala.

Calcoliamo ora

$$\int_0^T S_t\, dS_t \tag{4.1.46}$$

come limite (in probabilità) delle somme

$$\sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i}(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}) =: \sigma_0$$

definiamo inoltre

$$\sum_{i=0}^{n-1} S_{t_{i+1}}(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}) =: \sigma_1$$

da cui

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_1) - (\sigma_1 - \sigma_0)\\ &= \frac{S_T^2 - S_0^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(S_{t_{i+1}} - S_{t_i})^2\\ &\xrightarrow[\mathbb{P}]{} \frac{S_T^2 - S_0^2}{2} - \frac{A_T}{2}\end{aligned}$$

e infine

$$\begin{aligned}S_T^2 &= S_0^2 + 2\int_0^T S_t dS_t + A_t\\ &= S_0^2 + 2\int_0^T S_t dV_t + A_t + 2\int_0^T S_t dM_t\end{aligned} \tag{4.1.47}$$

ove i primi tre addendi sono processi a variazione totale limitata e l'ultimo è una martingala. Per cui $S_T^2 = \tilde{V}_T + \tilde{M}_T$ e il quadrato di una semimartingala risulta ancora una semimartingala.

Esempio 4.3. Siano F_s, G_s processi stocastici in $\Lambda_1([0,T])$, $\Lambda^2([0,T])$ rispettivamente. Poniamo $V_t = \int_0^t F(s)ds$ e $M_t = \int_0^t G(s)dW_s$, sia poi

$$\begin{aligned}S_t &= S_0 + V_t + M_t\\ &= S_0 + \int_0^t F(s)ds + \int_0^t G(s)dW_s\end{aligned} \tag{4.1.48}$$

applicando (4.1.47) a (4.1.48)

$$S_t^2 = S_0^2 + 2\int_0^t S_r F(r)dr + \int_0^t G(r)^2 dr + 2\int_0^t S_r G(r) dW_r.$$

Consideriamo due tali processi di Itô

$$\begin{aligned} S_1(t)^2 &= S_1(0) + \int_0^t F_1(s)ds + \int_0^t G_1(s)dW_s \\ S_2(t)^2 &= S_2(0) + \int_0^t F_2(s)ds + \int_0^t G_2(s)dW_s \end{aligned}$$

usando l'identità di polarizzazione $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ si ottiene

$$\begin{aligned} S_1(t)S_2(t) = S_1(0)S_2(0) &+ \int_0^t (S_1(r)F_2(r) + S_2(r)F_1(r))dr \\ &+ \int_0^t (S_1(r)G_2(r) + S_2(r)G_1(r))dW_r + \int_0^t G_1(r)G_2(r)dr \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} d(S_1S_2) &= S_1 dS_2 + S_2 dS_1 + G_1G_2 dt \\ &= S_1 dS_2 + S_2 dS_1 + dS_1 dS_2 \end{aligned}$$

e abbiamo così dimostrato la Proposizione 7.3 del [Bal00].

Stochastic Differential Equations **a.a. 2016-17**

Lezione del 21/04/2017

Prof: Luciano Tubaro *Scritto da: Giulia Bertagnolli*

Riprendiamo l'Esempio 4.3 e, sequendo il [Bal00] 7.1 scriviamo la *formula generale di Itô*.

Siano $F \in \Lambda_1([0,T])$, $G \in \Lambda^2([0,T])$ e per $t \in [0,T]$ sia S_t un processo tale che

$$S_t = S_0 + \int_0^t F(s)ds + \int_0^t G(s)dW_s \tag{4.1.49}$$

la (4.1.49) può essere scritta con la in forma differenziale (benché non aggiunga significato) in questo caso si parla di *differenziale stocastico*, mentre S_t è detto *processo di Itô*

$$dS_t = F_t dt + G_t dW_t. \tag{4.1.50}$$

Ora,

$$d(S_t^2) = 2S_t dS_t + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}(dS_t)^2$$

e usando la "*ricetta*" della formula di Itô, (4.1.4)

$$\begin{aligned}(dS_t)^2 &= \cancel{F_t^2 dt^2} + 2\cancel{S_t G_t dt dW_t} + G_t^2 dW_t^2 \\ &= G_t^2 dt\end{aligned}$$

da cui

$$d(S_t^2) = 2S_t(F_t dt + G_t dW_t) + G_t^2 dt.$$

In generale vale per qualsiasi polinomio $P(S_t) = \sum a_k S_t^k$

$$d(P(S_t)) = P'(S_t)dS_t + \frac{1}{2}P''(S_t)G_t^2 dt \tag{4.1.51}$$

4.2 Formula Generale di Itô 1-dimensionale

Enunciamo di seguito in maniera formale la *formula di Ito 1-dimensionale* (si vedia anche Thm. 4.1.2 [Oks13]).

Teorema 7 (The 1-dimensional Itô Formula)**.** *Sia S_t un processo di Itô come in (4.1.50) e sia $\varphi : [0,T] \times \mathbb{R}$ tale che $\varphi \in \mathcal{C}^{1,2}$, i.e. $\mathcal{C}^1$ in t e $\mathcal{C}^2$ in x. Allora $Y_t = \varphi(t, S_t)$ è ancora un processo di Itô e vale la formula*

$$\boxed{dY_t = d\varphi(t,S_t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,S_t)dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,S_t)dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x}(t,S_t)(dS_t)^2} \tag{4.2.1}$$

ove $(dS_t)^2$ è calcolato secondo le regole (4.1.4).

Stochastic Differential Equations **a.a. 2016-17**

Lezione del 26/04/2017

Prof: Luciano Tubaro *Scritto da: Nicolò Cangiotto*

5 Introduzione alle equazioni differenziali stocastiche (SDE)

La domanda a cui cerchiamo di dare risposta è: esiste un processo $X(t)$ tale che dX(t)) sia *differenziabile secondo Itô*?

Consideriamo la seguente equazione:

$$dX(t) = b(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW_t. \tag{5.0.1}$$

Se $\sigma(X(t), t) = 0$ otteniamo una equazione differenziale ordinaria:

$$dx(t) = b(x(t), t)dt \tag{5.0.2}$$

Sappiamo per il *Teorema di esistenza e unicità per equazioni differenziali ordinarie* che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} dx(t) = b(x(t), t)dt \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{5.0.3}$$

con $b(\cdot)$ lipschitziana ammette un'unica soluzione.

Nel caso delle SDE sono necessarie le seguenti ipotesi:

1. le mappe $(x, t) \mapsto b(x, t)$ e $(x, t) \mapsto \sigma(x, t)$ devono essere misurabili;
2. $\exists M > 0$ tale che:

$$|b(x, t)| \leq M(1 + |x|);$$
$$|\sigma(x, t)| \leq M(1 + |x|).$$

   Tale condizione viene chiamata *sublinearità*.
3. $\exists M > 0$ tale che:

$$|b(x, t) - b(y, t)| \leq L|x - y|;$$
$$|\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| \leq L|x - y|.$$

   Questa è la condizione di *lipschitzianità*.

Le ipotesi possono essere indebolite: possiamo sostituire la condizionde di lipschitzianità con la condizione di *locale lipschitzianità*[6]:

3*. $\forall N > 0 \exists L_N$ tale che $\forall |x| < N$ e $\forall |y| < N$ abbiamo

$$|b(x, t) - b(y, t)| \leq L_N|x - y|;$$
$$|\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| \leq L_N|x - y|.$$

[6] Nel caso della locale lipschitzianità le condizioni 2. risultano fondamentali. Possiamo vedere tale condizione come delle particolare *maggiorazioni a priori*.

Come vedremo in seguito, nel caso delle SDE, il nostro processo $x = X(t)$ risulterà un processo di diffusione per il quale varranno:

i. $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{|y-x|<\epsilon} p_t(x,y)dy = 0$;

ii. $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{|y-x|\geq\epsilon} (y-x)p_t(x,y)dy = b(x,t)$;

iii. $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{|y-x|<\epsilon} (y-x)^2 p_t(x,y)dy = a(x,t) = \sigma^2(x,t)$.

5.1 Esempi di particolari ODE

Equazione di Riccati. Un esempio di equazione localmente lipschitziana (ma non lipschitziana) è

$$\begin{cases} dx(t) = x^2(t)dt \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{5.1.1}$$

Notiamo che con $x_0 > 0$ questa *esplode al futuro*, mentre con $x_0 < 0$ *esplode al passato*.

Funzione hölderiana. Un esempio di funzione che non è localmente lipschitziana è

$$\begin{cases} dx(t) = \sqrt{|x(t)|}dt \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{5.1.2}$$

In particolare questa funzione è hölderiana di ordine $\frac{1}{2}$. In questo caso vi è un problema in 0 e non è garantita l'unicità della soluzione.

Stochastic Differential Equations **a.a. 2016-17**

Lezione del 28/04/2017

Prof: Luciano Tubaro *Scritto da: Nicolò Cangiotti*

6 Equazioni differenziali stocastiche: caso n-dimensionale

In queste lezioni generalizzeremo quanto visto in precedenza in una dimensione per processi di dimensione generica. Inizieremo l'analisi prendendo confidenza con i casi 2D e 3D per poi passare al caso generale.

2D Consideriamo il seguente processo bidimensionale:

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

e il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} dX_1 = (\mu_{11}X_1 + \mu_{12}X_2)\, dt + \sigma_{11}X_1 dW_1 + \sigma_{12}X_2 dW2 \\ dX_2 = (\mu_{21}X_1 + \mu_{22}X_2)\, dt + \sigma_{21}X_1 dW_1 + \sigma_{22}X_2 dW2 \end{cases}$$

In maniera più efficace possiamo scrivere:

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dW_t, \tag{6.0.1}$$

dove

$$dW_t = \begin{pmatrix} dW_1 \\ dW_2 \end{pmatrix}$$

e $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}(2,2)$ sono definite come segue[7]:

$$\sigma(X(t)) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}X_1 & \sigma_{12}X_2 \\ \sigma_{21}X_1 & \sigma_{22}X_2 \end{pmatrix};$$

$$b(X(t)) = b\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

Osservazione 6.1. È evidente che stiamo supponendo W_1 e W_2 processi indipendeti.

[7] $\mathcal{M}(n,d)$ è l'insieme delle matrici composte da n righe e d colonne.

3D Vediamo ora una piccola generalizzazione prima di passare al caso generale. Consideriamo il seguente processo tridimensionale:

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

e il seguente sistema di equazioni la cui aleatorietà è governata da due processi W_1 e W_2:

$$\begin{cases} dX_1 = b_1(X_1, X_2, X_3)dt + \sigma_{11}(X_1, X_2, X_3)dW_1 + \sigma_{12}(X_1, X_2, X_3)dW2 \\ dX_2 = b_2(X_1, X_2, X_3)dt + \sigma_{21}(X_1, X_2, X_3)dW_1 + \sigma_{22}(X_1, X_2, X_3)dW2 \\ dX_3 = b_3(X_1, X_2, X_3)dt + \sigma_{31}(X_1, X_2, X_3)dW_1 + \sigma_{32}(X_1, X_2, X_3)dW2 \end{cases}$$

Notiamo che rispetto al caso precedente oltre ad avere un processo in più le funzioni b e e σ dipendono da X_1, X_2, X_3. Inoltre ora σ è una matrice di $\mathcal{M}(3, 2)$. A questo punto posso scrivere:

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW_t \tag{6.0.2}$$

Definiamo $G(t) \coloneqq \sigma(t, X(t)) \in \mathcal{M}(3, 2)$ (omettiamo per comodità la dipendenza diretta da $(X(t))$. Abbiamo

$$\int_0^t [G(r)\, dWr] = \int_0^t \begin{bmatrix} G_{11}dW_1 + G_{12}dW_2 \\ G_{12}dW_1 + G_{22}dW_2 \\ G_{31}dW_1 + G_{32}dW_2 \end{bmatrix} \quad . \tag{6.0.3}$$

A questo punto basta portare l'integrale dentro la matrice e svolgere gli integrali di Itô a una dimensione già studiati in precedenza.

Caso Generale. Vediamo infine come esprimere un processo $n-$dimensionale $X(t)$ governato da W_t d-dimensionale. Generalizzando ulteriormente quello che abbiamo visto in due e tre dimensioni, possiamo scrivere (omettendo anche in questo caso la dipendenza diretta da $X(t)$):

$$d(X(t)) = F(t)dt + G(t)dW_t \tag{6.0.4}$$

con $F(t) \in \mathbb{R}^n$, $G(t) \in \mathcal{M}(n, d)$ e $DW_t \in \mathbb{R}^d$.

Stochastic Differential Equations	**a.a. 2016-17**

Lezione del 03/05/2017

Prof: Luciano Tubaro — *Scritto da: Nicolò Cangiotti*

7 Formula di Itô n-dimensionale

Consideriamo $d(X(t)) = F(t)dt + G(t)dW_t$ come in 6.0.4 e una funzione $u(t, X(t)) \in \mathcal{C}^{1,2}$, $u : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Allora vale la formula di Itō:

$$du(t, X(t)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, X(t))dt + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial X_i}(t, X(t))dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial X_i \partial X_j}(t, X(t))dX_i dX_j \tag{7.0.1}$$

La dimostrazione si può trovare in [Bal00] e in [Oks13].

Notazioni Un modo alternativo e interessante di scrivere la 7.0.1 è il seguente:

$$du(t, X(t)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, X(t))dt + \langle \nabla u(t, X(t)), F(t)\rangle dt + \langle \nabla u(t, X(t)), G(t)dW_t\rangle + \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(A\nabla^2 u), \tag{7.0.2}$$

dove $A = G \cdot G^*$ co G^* trasposta di G. Quindi, in particolare, $\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(A\nabla^2 u) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(G \cdot G^* \nabla^2 u)$.

Stochastic Differential Equations **a.a. 2016-17**

Lezione del 05/05/2017

Prof: Luciano Tubaro *Scritto da: Nicolò Cangiotti*

8 Esempi e applicazioni

Vediamo ora alcune applicazioni delle equazioni differenziali stocastiche alla equazioni differenziali alle derivate parziali.

Problema parabolico. Consideriamo il seguente problema (di Cauchy) alle derivate parziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x} + b(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} \\ u(0,x) = \phi(x) \end{cases} \tag{8.0.1}$$

Vogliamo determinare $u \in \mathcal{C}^{1,2}$. Associamo al problema (8.0.1) la seguente equazione differenziale stocastica

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW_t \\ X(0) = \bar{x} \end{cases} \tag{8.0.2}$$

in cui $X(0)$ è una *delta di Dirac*. Applico ora la formula di Itō alla funzione $u(t-s, X(s))$:

$$du(t-s, X(s)) = -\frac{\partial u}{\partial s}(t-s, X(s))dt + \frac{\partial u}{\partial X(s))}dX(s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial X^2(s)}(t-s, X(s))\,(dX(s))^2 \tag{8.0.3}$$

Utilizzando la (8.0.2) otteniamo:

$$\begin{aligned} du(t-s, X(s)) = &\Big[-\frac{\partial u}{\partial s}(t-s, X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2(t-s, X(s))\frac{\partial^2 u}{\partial X^2(s)}(t-s, X(s)) + \\ &+ b(t-s, X(s))\frac{\partial u}{\partial X(s)}(t-s, X(s))\Big]\,dt + \sigma(t-s)\frac{\partial u}{\partial X(s))}dW_s \end{aligned} \tag{8.0.4}$$

e grazie alla (8.0.1) notiamo che:

$$-\frac{\partial u}{\partial s}(t-s, X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2(t-s, X(s))\frac{\partial^2 u}{\partial X^2(s)}(t-s, X(s)) + b(t-s, X(s))\frac{\partial u}{\partial X(s)}(t-s, X(s)) = 0 \tag{8.0.5}$$

Sostituendo nella (8) otteniamo:

$$d(u(t-s, X(s)) = \sigma(t-s)\frac{\partial u}{\partial X(s))}dW_s \tag{8.0.6}$$

e integrando

$$u(0, X(t)) - u(t, X(0)) = \int_0^t \sigma(t-s, X(s))\frac{\partial u}{\partial X(s))}dW_s \tag{8.0.7}$$

Inoltre per i dati inziali abbiamo:

$$u(0, X(t)) - u(t, X(0)) = \phi(X(t)) - u(t, (\bar{x})). \tag{8.0.8}$$

Procediamo ora calcolando la media e ricordando che la media dell'integrale di Itō è 0. Otteniamo così:

$$u(t, \bar{x}) = \mathbb{E}[\phi(X(t)]. \tag{8.0.9}$$

A questo punto - complice un sottinteso abuso di notazione - abbiamo trovato un'espressione della soluzione del problema (8.0.1) sfruttando il processo stocastico $X(t)$ della (8.0.2).

Problema ellittico. Vogliamo ora risolvere il seguente seguente problema (di Dirichlet) alle derivate parziali:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x} + b(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{se } x \in \mathcal{O} \\ u(x) = \phi(x) & \text{se } x \in \partial\mathcal{O} \end{cases} \tag{8.0.10}$$

In questo caso consideriamo il problema n-dimensionale cioè $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $b(x) \in \mathbb{R}^n$ e $\sigma(x) \in \mathbb{M}(n,k)$. Se vogliamo usare le notazioni di (8.0.10) notiamo che $\sigma^2(x) = \sigma(x) \cdot \sigma^*(x) = A \in \mathbb{M}(n,n)$.

Posso scrivere (8.0.10) in maniera più economica come:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(A\nabla^2 u(x)\right) + \langle b, \nabla u(x)\rangle = 0 & \text{se } x \in \mathcal{O} \\ u(x) = \phi(x) & \text{se } x \in \partial\mathcal{O} \end{cases} \tag{8.0.11}$$

Ci chiediamo se sia possibile scrivere $u(x)$ in termini del processo definito da

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW_t \\ X(0) = \bar{x} \end{cases} \tag{8.0.12}$$

dove, in questo caso, $X(t)$ è di dimensione n e lo possiamo vedere come $X(t, \bar{x}, \omega)$ con ω appartenente al solito spazio di probabilità Ω.
Definiamo ora $\tau_{\bar{x}}(\omega)$ il tempo necessario affinché il nostro cammino aleatorio tocchi la frontiera di $\mathcal{O}$. Quello che avviene dopo questo momento non mi interessa[8].

Banalmente otteniamo che $X(\tau_{\bar{x}}, \bar{x}, \omega) \in \partial\mathcal{O}$. A questo punto posso utilizzare la formula di Itō.

$$\begin{aligned} du(X(t)) &= \langle \nabla u(X(t)), dX(t)\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\nabla^2 u(X(t))\ dX(t) \cdot dX(t)^*\right) = \\ &= \langle b(X(t)), \nabla u(X(t))\rangle dt + \langle \nabla u(X(t)), \sigma(X(t))dW_t\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(A\nabla^2(X(t))\right)dt \end{aligned} \tag{8.0.13}$$

Notiamo ora che per sfruttando (8.0.10) abbiamo:

$$\langle b(X(t)), \nabla u(X(t))\rangle dt + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(A\nabla^2(X(t))\right)dt = 0 \tag{8.0.14}$$

e dunque:

$$du(X(t)) = \langle \nabla u(X(t)), \sigma(X(t))dW_t\rangle. \tag{8.0.15}$$

Integrando otteniamo

$$u(X(t)) - u(\bar{x}) = \int_0^t \langle \nabla u(X(s)), \sigma(X(s))dW_s\rangle \tag{8.0.16}$$

È ora doverosa un'osservazione: per applicare la formula di Itō è necessario supporre $t \leq \tau_{\bar{x}}$. Sostituisco quindi t con $\tau_{\bar{x}}$. In tal modo otteniamo

$$u(X(\tau_{\bar{x}})) - u(\bar{x}) = \int_0^{\tau_{\bar{x}}} \langle \nabla u(X(s)), \sigma(X(s))dW_s\rangle. \tag{8.0.17}$$

[8]Notiamo che l'esistenza di questo $\tau_{\bar{x}}(\omega)$ è da dimostrare.

Ma $u(X(\tau_{\bar{x}})) - u(\bar{x}) = \phi(X(\tau_{\bar{x}})) - u(\bar{x})$ e passando ancora una volta al valore medio abbiamo

$$\mathbb{E}(\phi(X(\tau_{\bar{x}})) = u(\bar{x}), \tag{8.0.18}$$

infatti il valore medio dell'integrale di Itō è 0. Bisogna però fare attenzione, in quanto il fatto appena citato non è banale in quanto τ_x è una variabile dipendente da ω. Si può comunque dimostrare che l'affermazione risulta essere vera vera, si vedano al riguardo il *Lemma 6.19* e il *Teorema 6.20* in [Bal00]. Anche in questo caso, in maniera analoga al caso parabolico, abbiamo trovato un'espressione della soluzione del problema (8.0.10) tramite l'associazione all'equazione differenziale stocastica (8.0.12).

Stochastic Differential Equations **a.a. 2016-17**

Lezione del 10/05/2017

Prof: Luciano Tubaro *Scritto da: Nicolò Cangiotti*

Osservazione 8.1. Supponiamo, in riferimento al problema ellittico visto in precedenza (8.0.11) di fissare $A = I$ e $b = 0$. Otteniamo così:

$$\begin{cases} \nabla u(x) = 0 & \text{se } x \in \mathcal{O} \\ u(x) = \phi(x) & \text{se } x \in \partial\mathcal{O} \end{cases} \tag{8.0.19}$$

Il risultato classico, quando l'aperto $\mathcal{O}$ è una sfera, lo si deve a Poisson ed è dato da:

$$u(x) = \int_{y=|R|} \phi(y) N_R(x,y) H_{n-1}(dy) \tag{8.0.20}$$

dove H_{n-1} indica la misura di Hausdorff (sulla superficie della sfera), R è il raffio della sfera e $N_R(x,y)$ è il cosiddetto *nucleo di Poisson* dato da:

$$N_R(x,y) = \frac{1}{R \cdot \omega_n} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} \tag{8.0.21}$$

con ω_n superficie della sfera n-dimensionale di raggio 1.

A questo punto notiamo che la (8.0.18) si può esprimere come:

$$\mathbb{E}(\phi(X(t))) = \int_\Omega \phi\left(X\left(\tau_{x(\omega)}\right)\right)(\omega)\mathbb{P}(d\omega). \tag{8.0.22}$$

Ω, in generale, è lo spazio di tutte le funzioni $\omega : \mathbb{R}^n \to R^+$. Grazie al *Teorema di Kolmogorov* [FPTT08] posso prendere la versione continua di queste trattorie ω. Per questo motivo è utile definire la mappa $Z : \Omega \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ che associa ad ogni ω il suo rappresentante continuo $W_t(\omega)$. In tal modo posso mappare la terna $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ in $\left(\mathcal{C}(\mathbb{R}^+), \mathcal{B}, \mathcal{W}\right)$, dove con $\mathcal{B}$ indico gli insiemi Boreliani e con $\mathcal{W}$ indico la *misura di Wiener*. A questo punto, definendo $Y : \Omega \to \partial\mathcal{O}$, otteniamo:

$$u(x) = \mathbb{E}(\phi(X(\tau))) = \int_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)} \phi(X(\tau)(\omega))\mathcal{W}(d\omega) = \tag{8.0.23}$$

$$= \int_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)} \phi(Y(\omega))\mathcal{W}(d\omega) = \tag{8.0.24}$$

$$= \int_{\partial\mathcal{O}} \phi(y)\mu(dy) \tag{8.0.25}$$

dove $\mu(y)$ è la misura immagine definita da $\mu(J) = \mathbb{P}(\mathbb{Y} \in \mathbb{J})$. Nel caso di Dirichlet tale misura immagine è esattamente il nucleo di Poisson.

9 Proprietà delle soluzioni delle SDE

Caso ODE. Consideriamo la seguente equazione differenziale ordinaria:

$$\begin{cases} dx(t) = b(t, x(t))dt \\ x(0) = \xi \end{cases} \tag{9.0.1}$$

e supponiamo di interrompere la traiettoria della soluzione ad un istante $s > 0$. Consideriamo ora la seguente equazione:

$$\begin{cases} dx(t) = b(t, x(t))dt \\ x(s) = \eta \end{cases} \tag{9.0.2}$$

in cui abbiamo cambiato il dato iniziale. Supponendo b lipschitziana le traiettorie delle due equazioni coincidono e possiamo scrivere:

$$x(t, 0, \xi) = x(t, s, x(s, 0, \xi)). \tag{9.0.3}$$

Quanto appena visto esprime il concetto di *flow property* (*proprietà di flusso*).

Caso SDE. In modo analogo a quello visto per le ODE consideriamo la seguente equazione differenziale stocastica

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW_t \\ X(0) = X_0 \end{cases} \tag{9.0.4}$$

con X_0 $\mathcal{F}_0$-misurabile. Allora possiamo affermare che:

- X_t è un **processo di Markov**;
- X_t è un **processo di diffusione**.

In particolare b rappresentante il *drift* e $\sigma \cdot \sigma^*$ è la matrice di covarianza.

Possiamo scrivere (9.0.4) come:

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW_t \\ X(0) = X_0 \end{cases} \tag{9.0.5}$$

per $t \geq s$. In tal modo la probabilità di transizione è data da:

$$p(s, t, x, I) = \mathbb{P}(X(t) \in I | X(s) = x) = \mathbb{P}(X^{(s,x)}(t) \in I). \tag{9.0.6}$$

Se eliminiamo la dipendenza diretta dal tempo t avremo

$$\begin{cases} dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dW_t \\ X(0) = x \end{cases} \tag{9.0.7}$$

In questa condizione di omogeneità temporale possiamo scrivere la probabilità di transizione come $p_{\bar{t}}(x, I)$ con $\bar{t} = t - s$.

10 Esistenza e unicità delle soluzioni per SDE

Iniziamo ora lo studio per capire le condizioni di esistenza e unicità delle soluzioni per le equazioni differenziali stocastiche.

È doveroso partire con una puntualizzazione. In generale dobbiamo distinguere due casi nello studio di un'equazione differenziale stocastica del tipo:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW_s. \tag{10.0.1}$$

Soluzione debole. Nel caso delle soluzioni deboli[9] i dati del problema sono dati da X_0, $b(t, X(t))$ e $\sigma(t, X(t))$ e la soluzione è data dalla coppia $(X(t), W_t)$. In particolare quindi non è deducibile alcuna filtrazione dai dati iniziali.

Soluzione forte. Nel caso delle soluzioni forti i dati del problema sono dati da X_0, $b(t, X(t))$, $\sigma(t, X(t))$ e W_t. Da questi dati possiamo generare la filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ e la soluzione sarà data da X_t $\mathcal{F}_t$-misurabile.

Noi tratteremo il caso di soluzioni forti.

Idea della dimostrazione nel caso ODE. È utile ripercorrere i passi chiavi del teorema di esistenza e unicità nel caso delle equazioni differenziali ordinarie.

$$\begin{cases} dx(t) = b(t, x(t))dt \\ x(s) = x_0 \end{cases} \tag{10.0.2}$$

Scelgo una funzione $x(\cdot)$ e costruiso l'operatore

$$F(x)(t) = x_0 + \int_0^t b(s, x(s))ds \tag{10.0.3}$$

Posso definire la successione $\{x_n\}_n$ come segue:

$$\begin{aligned} x_1(t) =& F(x_0)(t) \\ x_2(t) =& F(x_1)(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) =& F(x_{n-1})(t) \end{aligned}$$

Se $b(\cdot)$ è lipschitziana abbiamo la convergenza $x_n \to x$ (bisogna usare il fatto che $\{x_n\}_n$ è una successione di Cauchy).

In tal modo si dimostro l'esistenza. Per l'unicità si può utilizzare, ad esempio, il *Lemma di Gronwall*.

Idea della dimostrazione nel caso SDE. Sfruttando idee molto simili a quelle viste per le ODE possiamo costruire una dimostrazione simile per le SDE.

Recuperiamo le ipotesi che avevamo citato in precedenza.

1. *Misurabilità.* Le mappe $(x, t) \mapsto b(x, t)$ e $(x, t) \mapsto \sigma(x, t)$ devono essere misurabili;
2. *Sublinearità.* $\exists M > 0$ tale che:
$$\begin{aligned} |b(x, t)| &\leq M(1 + |x|); \\ |\sigma(x, t)| &\leq M(1 + |x|). \end{aligned}$$
3. *Lipschitzianità.* $\exists M > 0$ tale che:
$$\begin{aligned} |b(x, t) - b(y, t)| &\leq L|x - y|; \\ |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| &\leq L|x - y|. \end{aligned}$$

A questo punto prendo un processo X_t e analogamente al caso delle ODE costruisco il funzionale:

$$F(X)(t) = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$$

[9]Introdotte da Strook e Varadhan nel 1967.

e quindi la successione $\{X_n\}_n$:

$$\begin{aligned}X_1(t) =&F(X_0)(t)\\X_2(t) =&F(X_1)(t)\\&\vdots\\X_n(t) =&F(X_{n-1})(t)\end{aligned}$$

A questo punto per dimostrare la convergenza $\{X_n\}_n$ sfrutto le maggiorazioni a priori del *Lemma 8.6* in [Bal00]. L'unicità anche in questo caso si dimostra grazie al *Lemma di Gronwall* (*Lemma 8.5* in [Bal00]).
Potremmo ora richiedere la continuità del processo limite della successione che infatti è data dal *Lemma di Borel-Cantelli*.

Cosa succede se $b(\cdot)$ è *localmente lipschitziana*? In questo caso la 3. è sostituita da

3*. $\forall N > 0 \exists L_N$ tale che $\forall |x| < N$ e $\forall |y| < N$ abbiamo

$$|b(x,t) - b(y,t)| \leq L_N |x-y|;$$
$$|\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| \leq L_N |x-y|.$$

e grazie al *Teroema 8.9* in [Bal00] possiamo dimostrare un teorema di esistenza e unicità[10] i.e. il *Teorema 8.10* in [Bal00].

[10] In realtà si dimostra che se esistono due soluzioni $X(t)$ e $X'(t)$ allora sono uguali quasi ovunque.

Stochastic Differential Equations **a.a. 2016-17**

Lezione del 17/05/2017

Prof: Luciano Tubaro *Scritto da: Nicolò Cangiotti*

Osservazione 10.1. Consideriamo una variabile aleatoria X e ammettiamo che sia $\mathcal{F}$-misurabile, dove con $\mathcal{F}$ indichiamo una σ-algerba. Se Y è una variabile aleatoria indipendente da $\mathcal{F}$ allora, sotto opportune condizioni di integrabilità abbiamo:

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) = X\mathbb{E}(Y). \tag{10.0.4}$$

Questo risultato è diretta conseguenza di un risultato più generale che si può trovare in [Bal00].

Lemma 8. *Consideriamo nel solito spazio di probabilità due variabili aleatorie X e Y e una funzione $\psi(X,Y)$ (con opportune ipotesi di misurabilità). Allora:*

$$\mathbb{E}(\psi(X,Y)|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(\psi(x,Y)|\mathcal{F})|_{x=X}. \tag{10.0.5}$$

Notiamo che se Y è indipendente da $\mathcal{F}$ abbiamo

$$\mathbb{E}(\psi(X,Y)|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(\psi(x,Y)|\mathcal{F})|_{x=X} = \mathbb{E}(\psi(x,Y))|_{x=X}. \tag{10.0.6}$$

Osservazione 10.2. Nelle più recenti edizioni di libri relativi alle SDE è possibile esprimere il risultato del *Lemma 8* in modo alternativo ed equivalente, provando l'esistenza della funzione $\hat{\psi}(X) := \mathbb{E}(\psi(X,Y)|\mathcal{F})$

Questa osservazione introduttiva risulterà utile nella dimostrazione del seguente risultato: le soluzioni delle SDE sono ***processi di Markov forti***. In realtà quello che andremo dimostrare è che le soluzioni rispettano la ***proprietà di Feller***. Si può dimostrre che se un processo di Markov rispetta la proprietà di Feller allora è un processo di Markov forte.

È opportuno ora introdurre alcune nozioni relative ai semigruppi[11].

11 Introduzione ai semigruppi di operatori lineari

Sia $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach e consideriamo un operatore lineare limitato $T : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$. Valgono:

- Linearità. $T(x_1 + \lambda x_2) = Tx_1 + \lambda Tx_2$, $\forall x_1, x_2 \in \mathfrak{X}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- Limitatezza. $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $\|Tx\| < c\,\|x\|$, $\forall x \in \mathfrak{X}$.

Consideriamo ora lo spazio degli operatori lineari limitati $B(\mathfrak{X})$ che risulta spazio di Banach con la norma:

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{11.0.1}$$

A questo punto possiamo prendre la famiglia di operatori $\{T_t\}_t$ con $t \in \mathbb{R}^+$ e dotarlo della struttura di semigruppo (commutativo). Le tre proprietà che vogliamo esso rispetti sono:

1. $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$, $T_{t_1} \cdot T_{t_2} = T_{t_1+t_2} = T_{t_2+t_1} = T_{t_2} \cdot T_{t_1}$;
2. $T_0 = I$;
3. $\forall x \in \mathfrak{X}$, $T_t x \xrightarrow{t \to 0} x$.

[11] In relazione ai semigruppi, si veda, ad esempio, [Paz83]

Osservazione 11.1. Consideriamo ora il seguente rapporto:

$$\begin{aligned}\left(\frac{T_{t+h}-T_t}{h}\right)x &= \frac{T_{t+h}x - T_t x}{h}\\ &= \frac{T_t(T_h x - x)}{h}\\ &= \left(T_t \cdot \frac{T_h - I}{h}\right)x.\end{aligned}$$

Analogamente possiamo dimostrare che

$$\left(\frac{T_{t+h}-T_t}{h}\right)x = \left(\frac{T_h - I}{h}\cdot T_t\right)x.$$

Dunque T_t e $\frac{T_h-I}{h}$ commutano. Quando esiste il seguente limite:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{T_h - I}{h}\right)x = Ax \tag{11.0.2}$$

abbiamo che l'operatore A è lineare e limitato.

Bisogna però fare un'importante precisazione: in generale tale limite non esiste per ogni $x \in \mathfrak{X}$. Gli x per cui vale la (11.0.2) costituiscono un insieme che indicheremo con $D_A \subset \mathfrak{X}$ (*dominio di* A)[12]. L'operatore A prende il nome di **generatore infinitesimale del semigruppo**.

11.1 Relazione con le equazioni differenziali

Se $x \in D_A$ possiamo scrivere

$$\frac{dT_t x}{dt} = AT_t x \tag{11.1.1}$$

e se ponimao $u_t = T_t x$ abbiamo

$$\begin{cases}\frac{du_t}{dt} = Au_t\\ u_0 = x\end{cases} \tag{11.1.2}$$

Esempio 11.1. Consideriamo la seguente

$$(Ax)(t) = x''(t), \forall t \in \mathbb{R} \tag{11.1.3}$$

Bisogna capire in quale spazio vogliamo lavorare. Se, ad esempio, $x \in L^p(\mathbb{R}) \cup \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, l'operatore A non risulta generatore infinitesimale di un semigruppo. Necessitiamo di una struttura più ampia: gli *spazi di Sobolev*. Solitamente si considera $x \in \mathcal{C}_b^{1,\alpha}$ (lo spazio delle funzioni continue limitate holderiane).

11.2 Relazione con le SDE

Consideriamo un processo di Markov $X(t)$ dotato della seguente probabilità di transizione:

$$p(s,x,t,I) = \mathbb{P}(X(t) \in I | X(s) = x) \tag{11.2.1}$$

Se il processo è omogeneo nel tempo possiamo riscrivere la probabilità di transizione come $p(\bar{t}, x, I)$ dove $\bar{t} = t - s$. Con abuso di notazione indicheremo tale probabilità $p(t,x,I)$.

Definiamo ora la famiglia di operatori $\{T_t\}_t$ nel seguente modo:

$$(T_t f)(x) := \mathbb{E}(f(X_t)|X_0 = x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)p(t,x,dy) \tag{11.2.2}$$

[12] L'insieme D_A è denso in $\mathfrak{X}$.

Qual è lo spazio $\mathfrak{X}$ in cui prendo le $f(\cdot)$?

Se $\mathfrak{X} = \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, la famiglia $\{T_t\}_t$ forma un semigruppo, ma non verifica la proprietà 3. di cui sopra (la condizione di continuità nello 0). Analogamente se prendiamo il caso boreliano $x \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$. Le funzioni che scegliamo sono quelle continue che vanno a zero all'infinito $x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. In generale però non è detto che se $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ allora anche $T_t f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, questa particolare proprietà è detta **proprietà di Feller**. In altre parole, una funzione $f \in \mathcal{C}_b$ rispetta la proprietà di Feller se per ogni $T_t \in B(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}))$ si ha $T_t f \in \mathcal{C}_b$[13].

Esempio 11.2. Sia $p(t,x,I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2t}\right] dy$, allora la famiglia dei $\{T_t\}_t$ definita da

$$T_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2t}\right] dy \tag{11.2.3}$$

forma un semigruppo in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. L'operatore A dato da $Au = \frac{1}{2}Au''$ funge da generatore infinitesimale. Notiamo inoltre che $D_A = \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R})$.

[13]Nel caso in cui $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ esiste un teorema che ci assicura che $T_t f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$. Nel caso in cui valga la relazione $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}) \Rightarrow T_t f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ allora diremo che f rispetta la **proprietà di Feller forte**.

Stochastic Differential Equations **a.a. 2016-17**

Lezione del 19/05/2017

Prof: Luciano Tubaro *Scritto da: Nicolò Cangiotti*

Osservazione 11.2. Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{cases} u'(t) = bu \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{11.2.4}$$

Come è noto la soluzione del problema è data da

$$u(t) = \mathrm{e}^{bt} \cdot u_0. \tag{11.2.5}$$

Vale inoltre

$$\mathrm{e}^{b(t+s)} = \mathrm{e}^{bt} \cdot \mathrm{e}^{bs} \tag{11.2.6}$$

Otteniamo quindi un generatore infinitesimale di un semigruppo.

Diversa situazione invece se il problema è del tipo

$$\begin{cases} u'(t) = b(t)u \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{11.2.7}$$

Come soluzione

$$u(t) = \exp\left[\int_0^t b(r)dr\right] \cdot u_0. \tag{11.2.8}$$

che però, in generale, non ha la proprietà espressa in (11.2.6).

Se b è una matrice notiamo che quanto detto per (11.2.4) non cambia, basta ricordare la seguente definizione

$$\mathrm{e}^{bt} := I + tb + \frac{t^2}{2!}b^2 + \frac{t^3}{3!}b^3 + \cdots \tag{11.2.9}$$

Ma per quanto riguarda il problema (11.2.7) osserviamo che tempi diversi generano matrici diversi che, in generale, non commutano. Affinché $= \exp\left[\int_0^t b(r)dr\right] \cdot u_0$ sia soluzione è necessario che $\forall t, t'$ $b(t)$ e $b(t')$ commutino. Esiste un teorema che ci garantisce l'esistenza (sotto le solite opportune ipotesi) di una soluzione (che però non possiamo scrivere in forma esplicita):

$$u(t) = U(t, 0)u_0. \tag{11.2.10}$$

Analogamente al problema unidimensionale abbiamo che, in generale, $U(t+s) \neq U(t) \cdot U(s)$. Un metodo per risolvere questo inghippo consiste nello studiare il problema

$$\begin{cases} u'(t) = b(t)u \\ u(s) = u_0 \end{cases} \tag{11.2.11}$$

La soluzione di (11.2.11) si scriverà

$$u(t) = U(t, s)u_0 \tag{11.2.12}$$

e la struttura di semigruppo è di nuovo garantita, infatti

$$\exp\left[\int_s^t b(x)dx\right] = U(t, s) = U(t, r)U(r, s) = \exp\left[\int_r^t b(x)dx\right] \cdot \exp\left[\int_s^r b(x)dx\right] \tag{11.2.13}$$

Quanto appena osservato è estendibile agli spazi di Banach con $b : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, limitato ($\|bx\| \leq c\,\|x\|$). Possiamo identificare la famiglia T_t con e^{bt}. E nel caso di un operatore Δ non limitato? Consideriamo, ad esempio, il seguente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u \\ u(s) = f(x) \end{cases} \tag{11.2.14}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ e $f(\cdot) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$. Abbiamo che $\forall f(\cdot) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ possiamo scrivere $u(t) = (T_t f)(x)$ ed inoltre $\|T_t\| < +\infty$. Notiamo che u è derivabile solo se $f(\cdot) \in D(\Delta) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Nel caso stocastico l'oggetto che studieremo è $p(t, x, I)$, quindi il caso omogeneo ($b(x)$ e $\sigma(x)$ non dipendono dal tempo)[14]. In particolare per le martingale risulterà utile il seguente risultato (la *disuguaglianza di Doob*):

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} |M_s| > \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^p} \cdot \mathbb{E}\left(|M_t|^p\right) \Rightarrow \tag{11.2.15}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t} |M_s|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{1-p} \cdot \mathbb{E}\left(|M_s|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{11.2.16}$$

[14]Nel caso non omogeneo dovremmo utilizzare i cosiddetti operatori di evoluzione.

Stochastic Differential Equations **a.a. 2016-17**

Lezione del 24/05/2017

Prof: Luciano Tubaro *Scritto da: Nicolò Cangiotti*

Riassumendo, i due risultati che ci torneranno utili nelle prossime lezioni sono:

- il *lemma di Gronwall*;
- la *disuguaglianza di Doob*.

Entrambi i risultati si possono trovare in [Bal00]. Vediamoli in dettaglio.

Lemma di Gronwall. Sia $v(t) \leq c + \int_0^t u(s)v(s)ds$ con $v, u \geq 0$ integrabili e limitate e $c \geq 0$. Allora:

$$v(t) \leq c \cdot \exp\left[\int_0^t u(s)ds\right].$$

Dimostrazione. Definiamo:

$$\alpha(t) = c + \int_0^t u(s)v(s)ds \tag{11.2.17}$$

Abbiamo quindi, per ipotesi, $v(t) \leq \alpha(t)$. Derivando (notando che la derivata esiste quasi ovunque), otteniamo

$$\alpha'(t) = u(t)v(t) \leq u(t)\alpha(t) \tag{11.2.18}$$

e quindi

$$\alpha'(t) - u(t)\alpha(t) \leq 0. \tag{11.2.19}$$

Possiamo riscrivere (11.2.19) nel seguente modo:

$$\left(\exp\left[-\int_0^t u(s)ds\right] \cdot \alpha(t)\right)' \leq 0. \tag{11.2.20}$$

A questo punto abbiamo finito, infatti

$$\exp\left[-\int_0^t u(s)ds\right] \cdot \alpha(t) \leq c \Rightarrow \tag{11.2.21}$$

$$\Rightarrow \alpha(t) \leq c \cdot \exp\left[-\int_0^t u(s)ds\right]. \tag{11.2.22}$$

Disuguaglianza di Doob. Sia M_t una martingala[15]. Allora

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} |M_s| > \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^p}\mathbb{E}\left(|M_t|^p\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t} |M_s|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\left(|M_s|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Dimostrazione. Fissiamo $Y = \sup_{0\leq s\leq t} |M_s|$ e $X = |M_s|^p$; abbiamo quindi $X, Y > 0$ e per ipotesi

$$\mathbb{P}(Y > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon}\int_{Y>\epsilon} X d\mathbb{P}. \tag{11.2.23}$$

[15] In realtà funziona anche con M_t semimartingala.

Consideriamo ora una funzione $\Psi(\cdot)$ crescente tale che $\Psi(\xi) > 0$ e $\Psi(0) = 0$. Abbiamo

$$\mathbb{E}(\Psi(Y)) = \int_{\mathbb{R}^+} \Psi(\xi) dF(\xi) \tag{11.2.24}$$

dove $F(\xi) = \mathbb{E}(Y \leq \epsilon)$. Definiamo, inoltre, $G(\xi) = \mathbb{P}(Y > \epsilon)$. Notiamo subito che $F + G = 1$ e quindi

$$\mathbb{E}(\Psi(Y)) = -\int_{\mathbb{R}^+} \Psi(\xi) dG(\xi). \tag{11.2.25}$$

Non è difficile vedere[16] che

$$-\int_0^\infty \Psi(\xi) dG(\xi) \leq \int_0^\infty G(\xi) d\Psi(\xi) \Rightarrow \tag{11.2.26}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\Psi(Y)) \leq \int_{\mathbb{R}^+} G(\xi)\Psi'(\xi) d\xi. \tag{11.2.27}$$

Utilizzando l'ipotesi abbiamo immediatamente

$$\int_{\mathbb{R}^+} G(\xi)\Psi'(\xi) d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\xi} \left(\int_{Y>\epsilon} X d\mathbb{P} \right) \Psi'(\xi) d\xi \tag{11.2.28}$$

Possiamo quindi scrivere

$$\mathbb{E}(\Psi(Y)) \leq \int_{\mathbb{R}^+} \left[\int_\Omega \mathbb{1}_{Y>\epsilon}(\omega) X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) \right] \frac{\Psi'(\xi)}{\xi} d\xi \tag{11.2.29}$$

$$\leq \int_\Omega X(\omega) \left[\int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{1}_{Y>\epsilon}(\omega) \frac{\Psi'(\xi)}{\xi} d\xi \right] \mathbb{P}(d\omega) \tag{11.2.30}$$

$$\leq \int_\Omega X(\omega) \left[\int_0^{Y(\omega)} \frac{\Psi'(\xi)}{\xi} d\xi \right] \mathbb{P}(d\omega) \tag{11.2.31}$$

Scegliamo ora $\Psi(\xi) = \xi^p$ con $p > 1$. Otteniamo

$$\mathbb{E}(Y^p) \leq \int_\Omega X(\omega) \left[\int_0^{Y(\omega)} p \cdot \xi^{p-2} d\xi \right] \mathbb{P}(d\omega) \tag{11.2.32}$$

$$\leq \frac{p}{p-1} \int_\Omega X(\omega) Y^{p-1}(\omega) \mathbb{P}(d\omega) \tag{11.2.33}$$

A questo punto ci viene in soccorso la *disuguaglianza di Hölder*[17] e quindi (sottintendendo la dipendenza da ω)

$$\mathbb{E}(Y^p) \leq \frac{p}{p-1} \cdot \left(\int_\Omega X^p d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_\Omega Y^{(p-1)p'} d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{p'}} \tag{11.2.34}$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Tramite semplici passaggi algebrici possiamo riscrivere (11.2.34) come

$$\mathbb{E}(Y^p) \leq \frac{p}{p-1} \cdot \left(\int_\Omega X^p d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_\Omega Y^p d\mathbb{P} \right)^{\frac{p-1}{p}} \tag{11.2.35}$$

e quindi

$$\left(\|Y\|_{L^p} \right)^p \leq \frac{p}{p-1} \|X\|_{L^p} \left(\|Y\|_{L^p} \right)^{p-1}. \tag{11.2.36}$$

Semplificando, otteniamo infine la tesi:

$$\|Y\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1} \|X\|_{L^p}. \tag{11.2.37}$$

Grazie alla disuguaglianza di Doob otteniamo immediatamente il seguente risultato. Sia $X \in \mathbb{M}^2$, consideriamo l'integrale $\int_0^t X(s) dW_s$. Allora:

---

[16]asta sviluppare per parti l'integrale $\int_0^L \Psi(\xi) dG(\xi)$ e mandare L a ∞.
[17]Per la *disuguaglianza di Hölder* si ha $\int f(x)g(x)dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^t X(s)dW_s\right|>\epsilon\right)\le\frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left(\left|\int_0^t X(s)dW_s\right|^2\right)=\frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left(\int_0^t X(s)^2ds\right) \tag{11.2.38}$$

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^t X(s)dW_s\right|^2\right)\le 4\cdot\mathbb{E}\left(\left|\int_0^t X(s)dW_s\right|^2\right)=4\cdot\mathbb{E}\left(\int_0^t X(s)^2ds\right) \tag{11.2.39}$$

Un'altra stima che possiamo fare riguarda il solito processo:

$$X(t)=X_0+\int_0^t b(s,X(s))ds+\int_0^t\sigma(s,X_s)dW_s$$

Se consideriamo la seguente disuguaglianza:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\le n(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2),\ \ x_i\in\mathbb{R} \tag{11.2.40}$$

otteniamo

$$X(t)^2\le 3\cdot\left(X_0^2+\left(\int_0^t b(s,X(s))ds\right)^2+\left(\int_0^t\sigma(s,X_s)dW_s\right)^2\right). \tag{11.2.41}$$

A questo punto ci interessano le seguenti stime (che derivano direttamente da quanto visto in precedenza):

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t b(s,X(s))^2ds\right)\le 2M^2\left(t+\mathbb{E}\left(\int_0^t X(s)^2ds\right)\right)$$
$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}\left(\int_0^t\sigma(s,X_s)dW_s\right)^2\right)\le 8M^2\left(t+\mathbb{E}\left(\int_0^t X(s)^2ds\right)\right)$$

dove la costante M è data dalla condizione di sublinearità (vista nelle lezioni precedenti):

$$|b(x,t)|\le M(1+|x|);$$
$$|\sigma(x,t)|\le M(1+|x|).$$

Osservazione 11.3. Notiamo che per la stima su $b(s,X(s))$ si passa attraverso la disuguaglianza di Hölder:

$$\left(\int_0^t b(s,X(s))ds\right)^2\le t\cdot\int_0^t b(s,X(s))^2ds. \tag{11.2.42}$$

Stochastic Differential Equations **a.a. 2016-17**

Lezione del 26/05/2017

Prof: Luciano Tubaro *Scritto da: Nicolò Cangiotti*

Vediamo ora il *Teorema di esistenza e unicità per le soluzioni di SDE*. Per comodità cambieremo la notazione usata fino ad ora e ci adegueremo a quella del *Teorema 8.8* in [Bal00].

Teorema 9. *Siano $b(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ tali che siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

1. *Misurabilità. Le mappe $(x,t) \mapsto b(x,t)$ e $(x,t) \mapsto \sigma(x,t)$ devono essere misurabili;*
2. *Sublinearità. $\exists M > 0$ tale che:*
$$|b(x,t)| \leq M(1+|x|);$$
$$|\sigma(x,t)| \leq M(1+|x|).$$
3. *Lipschitzianità. $\exists M > 0$ tale che:*
$$|b(x,t) - b(y,t)| \leq L|x-y|;$$
$$|\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| \leq L|x-y|.$$

allora esiste ed è unica (quasi ovunque) la soluzione di

$$\xi_t = \eta + \int_0^t b(s,\xi_s) + \int_0^t \sigma(s,\xi_s) dW_s \tag{11.2.43}$$

dove η è $\mathcal{F}_0$-misurabile e $t \in [0,T]$.

Dimostrazione. Trasformiamo (11.2.43) in un nuovo processo tramite l'operatore S scegliendo un'opportuna ξ.

$$(S\xi)(t) = \eta + \int_0^t b(s,\xi_s) + \int_0^t \sigma(s,\xi_s) dW_s \tag{11.2.44}$$

Possiamo ora costruire la seguente successione:

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= (S\eta)(t) \\ \xi_2(t) &= (S\xi_1)(t) \\ &\vdots \\ \xi_n(t) &= (S\xi_{n-1})(t). \end{aligned}$$

Osserviamo che per costruire tale successione è necessario richiedere η $\mathcal{F}_0$-misurabile.

Dobbiamo ora dimostrare (per induzione) il seguente fatto:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq u\leq t} |\xi_{n+1}(u) - \xi_n(u)|^2\right) \leq \frac{(Rt)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{11.2.45}$$

dove R indica un'opportuna costante. Vediamo il passo base $m = 0$ (il passo induttivo ricalca esattamente gli stessi passaggi). Dobbiamo dimostrare:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq u\leq t} |\xi_1(u) - \eta)|^2\right) \leq R \cdot t \tag{11.2.46}$$

Procediamo con le seguente maggiorazione (diretta tramite la disuguaglianza di Hölder):

$$\sup_{0\leq u\leq t}|\xi_1(u)-\eta|^2 \leq 2\cdot t\left(\int_0^t |b(s,\eta)|ds\right)^2 + 2\cdot \sup_{0\leq u\leq t}\left(\int_0^u |\sigma(s,\eta)dW_s|\right)^2 \tag{11.2.47}$$

Calcoliamo ora l'attesa e sfruttiamo le stime della lezione precedente, otteniamo così:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq u\leq t}|\xi_1(u)-\eta|^2\right) \leq 4M^2t(t+t\mathbb{E}(|\eta|^2)+16M^2(t+t\mathbb{E}(|\eta|^2) \leq R\cdot t \tag{11.2.48}$$

con $R = 16M^2(T+1)(1+\mathbb{E}(|\eta|^2)$.

A questo punto è sufficiente notare che:

$$\sum_0^\infty \frac{(Rt)^{n+1}}{(n+1)!} = \exp[Rt] \tag{11.2.49}$$

Ne segue che la successione $\{\xi_n\}_n$ è di Cauchy e quindi $\xi_m(u) \to \xi(u)$ con $u \in [0,t]$. Grazie alle ipotesi di lipschitzianità possiamo passare al limite della seguente successione di processi:

$$\xi_{n+1}(t) = (S\xi_n)(t) = \eta + \int_0^t b(\xi_n(s),s)ds + \int_0^t \sigma(\xi_n(s),s)dW_s \tag{11.2.50}$$

garantendo così l'esistenza della soluzione in $[0,T]$ (notiamo che quanto visto vale $\forall T \in \mathbb{R}$).

Per l'unicità è sufficiente utilizzare il Lemma di Gronwall.

Stochastic Differential Equations **a.a. 2016-17**

Lezione del 31/05/2017

Prof: Luciano Tubaro *Scritto da: Nicolò Cangiotti*

12 Alcune applicazione

Vediamo ora, sena addentrarci troppo nei dettagli, alcune applicazioni di quanto visto finora.

12.1 Il filtro di Kalman-Bucy

Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{cases} dX(t) = bX(t)dt + \sigma_1 dW_1 + \sigma_2 dW_2 \\ X(0) = X_0 \end{cases} \tag{12.1.1}$$

Non potendo scardinare direttamente il sistema 12.1.1, procediamo con l'osservazione di un dato $Y(t)$ che ci conduce alla seguente equazione stocastica

$$\begin{cases} dY(t) = \alpha X(t)dt + \sigma dW_1 \\ Y(0) = 0 \end{cases} \tag{12.1.2}$$

Quello che possiamo trovare è uno valore di stima per $X(t)$ che chiameremo $\tilde{X}(t)$ e che è dato da

$$\tilde{X}(t) = \mathbb{E}(X(t)|\mathcal{G}_t) \tag{12.1.3}$$

dove $\mathcal{G}_t$ è la σ-algebra generata da $Y(s)$ con $0 \leq s \leq t$. In Figura 12.1 è riportato lo schema del problema studiato. Un problema di questo tipo è spesso detto *problema di filtraggio*.

Per risolvere il problema dal punto di vista numerico è necessario passare per un passaggio intermedio dato da un'equazione di tipo Riccati:

$$\begin{cases} R'(t) = a + 2bR(t) - \left(\sigma_1 + \frac{\alpha}{\sigma} R(t)\right)^2 \\ R(0) = \mathrm{Var}(X_0) \end{cases} \tag{12.1.4}$$

con $a = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Infine possiamo ottenere $\tilde{X}(t)$ tramite

$$\begin{cases} d\tilde{X}(t) = \left(b - \alpha \frac{\sigma_1}{\sigma} - \frac{\alpha^2}{\sigma^2} R(t)\right) \tilde{X}(t)dt + \frac{\alpha R(t) + \sigma \cdot \sigma_1}{\sigma_2} dY(t) \\ \tilde{X}(0) = \mathbb{E}(X_0) \end{cases} \tag{12.1.5}$$

In particolare possiamo scrivere

$$d\tilde{X}(t) = \phi(t)\tilde{X}(t)dt + \psi(t)dY(t) \tag{12.1.6}$$

e quindi

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}(0) \exp\left[\int_0^t \phi(r)dr\right] + \int_0^t \exp\left[\int_s^t \phi(r)dr\right] \psi(s)ds. \tag{12.1.7}$$

Notiamo, in particolare, che il secondo addendo può semplicemente essere risolto per parti.

Per maggiori dettagli si veda il *Paragrafo 10.3* in [Bal00].

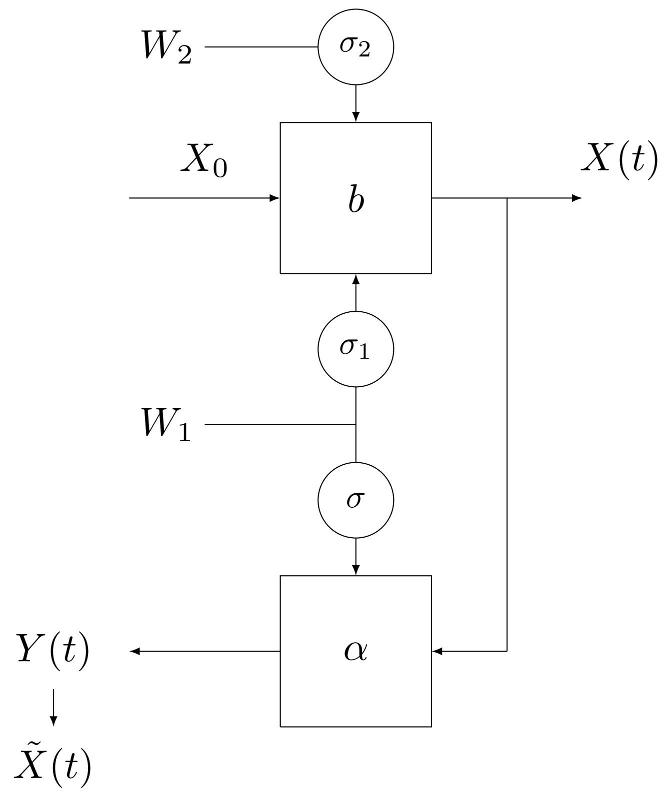

Figura 12.1: Schema esplicativo del *filtro di Kalman-Bucy*.

12.2 La formula di Black-Scholes

Ammettiamo che oggi (al tempo $t = 0$) vogliamo acquistare un'azione al tempo $t = T$ e al prezzo K. Sia $S(t)$ la funzione che descrive il valore delle azioni. È chiaro che se $S(T) > K$ avremo un guadagno, se invece $S(T) < K$ avremo una perdita. Se arrivato al tempo $t = T$ ci troviamo nella seconda situazione (quella che genera una perdita) possiamo, se acquistata in precedenza, esercitare un'opzione di annullo dell'acquisizione dell'azione. Tale opzione al tempo $t = 0$ mi costa C. Come posso determinare questo costo? Modelizziamo la situazione dal punto di vista stocastico, abbiamo

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW_t \\ S(0) = S_0 \end{cases} \tag{12.2.1}$$

che descrive l'andamento dell'azione, e abbiamo

$$\begin{cases} dB(t) = rB(t)dt \\ B(0) = B_0 \end{cases} \tag{12.2.2}$$

che descrive l'andamento di un certo conto (dove teniamo il capitale da investire).

Il costo C dovra tenere conto sia di $S(t)$ sia di $B(t)$ e può essere descritto da

$$C(t) = \alpha(t)S(t) + \beta(t)B(t) \tag{12.2.3}$$

dove la scelta di α e β determina una *strategia di investimento*.

Cerchiamo ora $C(T) = (S(T) - K)^+$ con $+$ che rappresenta la scelta positiva. Abbiamo:

$$dC(t) = d\alpha(t)S(t) + d\beta(t)B(t) + \alpha(t)dS(t) + \beta(t)dB(t) \tag{12.2.4}$$

Dato che non vogliamo aggiungere denaro poniamo $d\alpha(t)S(t) + d\beta(t)B(t) = 0$. La soluzione del problema è qualcosa del tipo:

$$C(t) = [\text{Termine a variazione limitata}] + [\text{Martingala}] \tag{12.2.5}$$

ed escludendo il termine a variazione limitata otteniamo la soluzione $C(t) = \phi(t, S(t))$ con $C(0) = \phi(0, S_0)$.

Osservazione 12.1. È importate segnalare che, sebbene μ scompaia nella soluzione, σ rimane e necessita di una stima. Come viene solitamente fatta? Tramite il prezzo delle azioni nel passato $\tilde{C}$ posso stimare la volatilità invertendo la formula di Black-Scholes ($\tilde{C}(\sigma)$ è invertibile).

Per maggiori dettagli si veda il *Paragrafo 10.9* in [Bal00].

Riferimenti bibliografici

[Bal00] Paolo Baldi. *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*, volume 28. Pitagora Editrice, 2000.

[CT12] Matteo Caiaffa and Luciano Tubaro. Stochastic processes, lecture notes. In english, 2012.

[FPTT08] Marco Frego, Marco Pizzato, Luca Tasin, and Luciano Tubaro. Appunti del corso processi stocastici. In italiano, 2008.

[Oks13] Bernt Oksendal. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media, 2013.

[Paz83] Amnon Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, 1983.

[Wal98] Wolfgang Walter. *Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag New York, 1998.