Il numero e è un numero trascendente, cioè per ogni polinomio $Q(t) = q_0 + q_1\, t + q_2\, t^2 + \cdots + q_n\, t^n$ a coefficienti interi (in $\mathbb{Z}$) risulta

$$Q(e) = q_0 + q_1\, e + q_2\, e^2 + \cdots + q_n\, e^n \neq 0.$$

Dimostrazione per assurdo. Supponiamo che esista un polinomio $Q(t) = q_0 + q_1\, t + q_2\, t^2 + \cdots + q_n\, t^n$ a coefficienti interi (in $\mathbb{Z}$) tale che, calcolato in e, si abbia

$$q_0 + q_1\, e + q_2\, e^2 + \cdots + q_n\, e^n = 0,$$

Possiamo supporre, senza perdere di generalità, che $q_0 > 0$.

Prendiamo un generico polinomio $P(t)$ con coefficienti reali di grado m. Possiamo allora determinare un polinomio f, anch'esso di grado m, tale che sia verificata l'identità

$$I(t) = \int_0^t e^{t-u} f(u)\, du = e^t\, P(0) - P(t),$$

prendendo $f(t) = P(t) - P'(t)$. Se fissiamo il polinomio $f(t)$, possiamo determinare il polinomio $P(t)$ derivando successivamente l'eguaglianza precedente

$$\begin{array}{rcl} f(t) =: f^{(0)}(t) & = & P(t) - P'(t) \\ f^{(1)}(t) & = & P'(t) - P''(t) \\ f^{(2)}(t) & = & P''(t) - P'''(t) \\ & \vdots & \\ f^{(m-1)}(t) & = & P^{(m-1)}(t) - P^{(m)}(t) \\ f^{(m)}(t) & = & P^{(m)}(t) \end{array}$$

e sommando otteniamo

$$\sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t) = P(t).$$

Quindi introducendo il numero J come

$$J = q_0\, I(0) + q_1\, I(1) + q_2\, I(2) + \cdots + q_n\, I(n) =$$

abbiamo che

$$J = P(0)\,(q_0 + q_1\, e + q_2\, e^2 + \cdots + q_n\, e^n) - (q_0 P(0) + q_1\, P(1) + q_2\, P(2) + \cdots + q_n\, P(n))$$

$$= -\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} q_k\, f^{(j)}(k)$$

Denotando con $\bar{f}$ il polinomio ottenuto da f prendendo come coefficienti il valore assoluto dei corrispondenti coefficienti di f:

$$f(u) = a_0+a_1\,u+a_2\,u^2+\cdots+a_m\,u^m, \quad \bar{f}(u) = |a_0|+|a_1|\,u+|a_2|\,u^2+\cdots+|a_m|\,u^m,$$

abbiamo che $|f(u)| \leq \bar{f}(u) \leq \bar{f}(t)$ per $0 \leq u \leq t$; quindi abbiamo la ovvia maggiorazione

$$|I(t)| \leq \int_0^t e^{t-u}|f(u)|\,du \leq \bar{f}(t)e^t \int_0^t du = e^t\,t\,\bar{f}(t)$$

Sinteticamente

$$\boxed{|I(t)| \leq e^t\,t\,\bar{f}(t)} \tag{1}$$

Scegliamo ora come polinomio f il seguente

$$\boxed{f(x) = x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\cdots(x-n)^p}. \tag{3}$$

Osserviamo che tale polinomio è a coefficienti interi e si può scrivere

$$f(x) = a\,x^{p-1} + b_p\,x^p + \cdots + b_m\,x^m, \quad m = (n+1)p-1$$

con $a = (-1)^{np}(n!)^p$; quindi tutte le derivate di ordine $j < p-1$ sono nulle per $x = 0$ e

$$f^{p-1}(0) = a\,(p-1)! = (-1)^{np}(n!)^p\,(p-1)!,$$

e quelle successive a $p-1$, sempre calcolate per $x = 0$, sono divisibili per $p!$ osservando che

$$f^j(0) = b_j\,j!, \quad j \geq p.$$

Infine, per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$ possiamo scrivere

$$f(x) = b_{k,p}\,(x-k)^p + b_{k,p+1}\,(x-k)^{p+1} + \cdots + b_{k,m}\,(x-k)^m,$$

e quindi tutte le derivate di ordine $j < p$, calcolate in k, sono nulle e quelle successive, calcolate in k, sono divisibili per $p!$.

Possiamo allora scrivere che

$$J = -q_0\,(-1)^{np}(n!)^p\,(p-1)! + z\,p! = (p-1)!\,[-q_0\,(-1)^{np}(n!)^p + z\,p]$$

con z un intero. Mostriamo che, scegliendo opportunamente p, il numero intero

$$-q_0\,(-1)^{np}(n!)^p + z\,p \neq 0:$$

è sufficiente prendere, come p, un primo tale che $p > q_0$ e $q > n$. Allora abbiamo che

$$\boxed{|J| \geq (p-1)!}. \tag{4}$$

D'altra parte abbiamo che ($I(0) = 0$)

$$|J| \leq |q_1|\,|I(1)| + |q_2|\,|I(2)| + |q_3|\,|I(3)| + \cdots + |q_n|\,|I(n)|$$

e dalla (3) abbiamo che

$$\bar{f}(x) = x^{p-1}(x+1)^p(x+2)^p \cdots (x+n)^p.$$

Quindi, per $k = 1, 2, \ldots, n$, si ha

$$\bar{f}(k) \leq \bar{f}(n) = \frac{1}{n}(n(n+1)(n+2)\cdots(n+n))^p$$

e per la (1) abbiamo

$$|I(k)| \leq e^k\, k\, \bar{f}(k) \leq e^k\, n\, \bar{f}(n)$$

da cui

$$|J| \leq (|q_1|\,e + |q_2|\,e^2 + |q_3|\,e^3 + \cdots + |q_n|\,e^n|)\,\big(n(n+1)(n+2)\cdots(n+n)\big)^p$$

Ora il termine $|q_1|\,e + |q_2|\,e^2 + |q_3|\,e^3 + \cdots + |q_n|\,e^n$ è sicuramente maggiore di 1 e quindi si può maggiorare con se stesso elevato alla p e quindi esiste una costante C ([1]) tale che

$$|J| \leq C^p;$$

quindi avremmo

$$(p-1)! \leq |J| \leq C^p$$

e questo è un assurdo per p sufficientemente grande! Infatti

$$(p-1)! \leq C^p \Rightarrow 1 \leq C\frac{C^{p-1}}{(p-1)!}$$

ma per $p \to \infty$ il termine $\frac{C^{p-1}}{(p-1)!}$ va a zero in quanto la serie

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{C^p}{p!} = e^C$$

è convergente.

[1] $C = (|q_1|\,e + |q_2|\,e^2 + |q_3|\,e^3 + \cdots + |q_n|\,e^n)\,n(n+1)(n+2)\cdots(n+n)$