Il numero e^x è un numero trascendente, cioè per ogni polinomio $Q(t) = q_0 + q_1\, t + q_2\, t^2 + \cdots + q_d\, t^d$ a coefficienti interi (in $\mathbb{Z}$) risulta

$$Q(e^x) = q_0 + q_1\, e^x + q_2\, e^{2x} + \cdots + q_d\, e^{dx} \neq 0.$$

per x razionale non nullo.

Dimostrazione per assurdo. È sufficiente prendere $0 < x < 1$ e razionale. Supponiamo che esista un polinomio $Q(t) = q_0 + q_1\, t + q_2\, t^2 + \cdots + q_d\, t^d$ a coefficienti interi (in $\mathbb{Z}$) tale che, calcolato in e^x, si abbia

$$q_0 + q_1\, e^x + q_2\, e^{2x} + \cdots + q_d\, e^{dx} = 0,$$

Possiamo supporre, senza perdere di generalità, che $q_0 > 0$.

Prendiamo un generico polinomio $P(t; x)$ con coefficienti reali di grado m. Possiamo allora determinare un polinomio f, anch'esso di grado m, tale che sia verificata l'identità

$$I(t; x) = \int_0^t e^{x(t-u)} f(u)\, du = e^{xt}\, P(0; x) - P(t; x),$$

prendendo $f(t) = x\, P(t; x) - P'(t; x)$, che dipende pure da x. Se fissiamo il polinomio $f(t)$, possiamo determinare il polinomio $P(t; x)$ derivando successivamente l'eguaglianza precedente

$$\begin{aligned}
\frac{f(t)}{x} =: \frac{f^{(0)}(t)}{x} &= P(t; x) - \frac{1}{x} P'(t; x) \\
\frac{f^{(1)}(t)}{x^2} &= \frac{1}{x} P'(t; x) - \frac{1}{x^2} P''(t; x) \\
&\vdots \\
\frac{f^{(m-1)}(t)}{x^m} &= \frac{P^{(m-1)}(t; x)}{x^{m-1}} - \frac{P^{(m)}(t; x)}{x^m} \\
\frac{f^{(m)}(t)}{x^{m+1}} &= \frac{P^{(m)}(t; x)}{x^m}
\end{aligned}$$

e sommando otteniamo

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{f^{(j)}(t)}{x^{j+1}} = P(t; x).$$

Quindi introducendo il numero J come

$$J = q_0\, I(0;x) + q_1\, I(1;x) + q_2\, I(2;x) + \cdots + q_d\, I(d;x) =$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} J = {} & P(0;x)\,(q_0 + q_1\, e^x + q_2\, e^{2x} + \cdots + q_d\, e^{dx}) \\ & -(q_0 P(0;x) + q_1\, P(1) + q_2\, P(2;x) + \cdots + q_d\, P(d;x)) \\ = {} & -\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{d} q_k\, \frac{f^{(j)}(k)}{x^{j+1}} \end{aligned}$$

Denotando con $\bar{f}$ il polinomio ottenuto da f prendendo come coefficienti il valore assoluto dei corrispondenti coefficienti di f:

$$f(u) = a_0 + a_1\, u + a_2\, u^2 + \cdots + a_m\, u^m, \quad \bar{f}(u) = |a_0| + |a_1|\, u + |a_2|\, u^2 + \cdots + |a_m|\, u^m,$$

abbiamo che $|f(u)| \leq \bar{f}(u) \leq \bar{f}(t)$ per $0 \leq u \leq t$; quindi abbiamo la ovvia maggiorazione

$$|I(t;x)| \leq \int_0^t e^{x(t-u)} |f(u)|\, du \leq \bar{f}(t) e^{xt} \int_0^t du = e^{xt}\, t\, \bar{f}(t)$$

Sinteticamente

$$\boxed{|I(t;x)| \leq e^{xt}\, t\, \bar{f}(t)} \tag{1}$$

Scegliamo ora come polinomio f il seguente

$$\boxed{f(t) = t^{p-1}(t-1)^p (t-2)^p \cdots (t-d)^p}. \tag{3}$$

Osserviamo che tale polinomio è a coefficienti interi e si può scrivere

$$f(t) = a\, t^{p-1} + b_p\, t^p + \cdots + b_m\, t^m, \quad m = (d+1)p - 1$$

con $a = (-1)^{dp}(d!)^p$; quindi tutte le derivate di ordine $j < p-1$ sono nulle per $t = 0$ e

$$f^{p-1}(0) = a\,(p-1)! = (-1)^{dp}(d!)^p\,(p-1)!,$$

e quelle successive a $p-1$, sempre calcolate per $t = 0$, sono divisibili per $p!$ osservando che

$$f^j(0) = b_j\, j!, \quad j \geq p.$$

Infine, per ogni $k = 1, 2, \ldots, d$ possiamo scrivere

$$f(t) = b_{k,p}\,(t-k)^p + b_{k,p+1}\,(t-k)^{p+1} + \cdots + b_{k,m}\,(t-k)^m,$$

e quindi tutte le derivate di ordine $j < p$, calcolate in k, sono nulle e quelle successive, calcolate in k, sono divisibili per $p!$.

Possiamo allora scrivere che, per $x = \frac{1}{n}$,

$$J = n^p\big[-q_0\,(-1)^{dp}(d!)^p\,(p-1)! + z\;p!\big] = n^p(p-1)!\,[-q_0\,(-1)^{dp}(d!)^p + z\;p]$$

con z un intero. Mostriamo che, scegliendo opportunamente p, il numero intero

$$-q_0\,(-1)^{dp}(d!)^p + z\;p \neq 0 :$$

è sufficiente prendere, come p, un primo tale che $p > q_0$ e $q > d$. Allora abbiamo che

$$\boxed{|J| \geq n^p\,(p-1)!}. \tag{4}$$

D'altra parte abbiamo che ($I(0) = 0$)

$$|J| \leq |q_1|\;|I(1;x)| + |q_2|\;|I(2;x)| + |q_3|\;|I(3;x)| + \cdots + |q_d|\;|I(d;x)|$$

e dalla (3) abbiamo che

$$\bar{f}(t) = t^{p-1}(t+1)^p(t+2)^p \cdots (t+d)^p.$$

Quindi, per $k = 1, 2, \ldots, d$, si ha

$$\bar{f}(k) \leq \bar{f}(d) = \frac{1}{d}(d(d+1)(d+2)\cdots(d+d))^p$$

e per la (1) abbiamo

$$|I(k;x)| \leq e^{xk}\,k\,\bar{f}(k) \leq e^{xk}\,d\,\bar{f}(d)$$

da cui

$$|J| \leq (|q_1|\;e^x + |q_2|\;e^{2x} + |q_3|\;e^{3x} + \cdots + |q_d|\;e^{dx}|)\,\big(d(d+1)(d+2)\cdots(d+d)\big)^p$$

Ora il termine $|q_1|\;e^x + |q_2|\;e^{2x} + |q_3|\;e^{3x} + \cdots + |q_d|\;e^{dx}$ è sicuramente maggiore di 1 e quindi si può maggiorare con se stesso elevato alla p e quindi esiste una costante C ([1]) tale che

$$|J| \leq C^p;$$

[1] $C = (|q_1|\;e^x + |q_2|\;e^{2x} + |q_3|\;e^{3x} + \cdots + |q_d|\;e^{dx})\,d(d+1)(d+2)\cdots(d+d)$

questa maggiorazione vale per ogni $x > 0$.
Quindi avremo

$$n^p\,(p-1)! \leq |J| \leq C^p$$

e questo è un assurdo per p sufficientemente grande! Infatti

$$n^p\,(p-1)! \leq C^p \Rightarrow 1 \leq \frac{C}{n}\frac{(\frac{C}{n})^{p-1}}{(p-1)!}$$

ma per $p \to \infty$ il secondo termine va a zero in quanto la serie

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{y^p}{p!} = e^y$$

è convergente.

Concludiamo osservando che dal fatto di avere $e^{\frac{1}{n}}$ trascendente discende che ogni $e^{\frac{m}{n}}$ è trascendente. Infine se e^x è trascendente segue che anche e^{-x} è trascendente.

Abbiamo che

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \beta_2 e^{\alpha_2} + \beta_3 e^{\alpha_3} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n} \neq 0$$

for any $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ and any $\beta_i \in \mathbb{Q}$ not all zero.
Infatti possiamo supporre

$$\alpha_i = \frac{m_i}{m}$$

che implica

$$\beta_1 (e^{1/m})^{m_1} + \beta_2 (e^{1/m})^{m_2} + \beta_3 (e^{1/m})^{m_3} + \cdots + \beta_n (e^{1/m})^{m_n} \neq 0$$

per la trascendenza di $e^{1/m}$.