Consideriamo il numero (complesso) $\theta_1 = \mathtt{i}\pi$; supponiamo che sia algebrico: allora esiste un polinomio irriducibile $M(z)$ (di grado diciamo d) con coefficienti interi tale che $M(\theta_1) = 0$.
Osservazione: anche $\theta_2 = -\mathtt{i}\pi$ è una radice del polinomio M. Denotiamo con $\theta_3, \theta_4, \ldots, \theta_d$ le altre radici. Consideriamo l'espressione

$$\mathcal{E} = (1 + e^{\theta_1})(1 + e^{\theta_2})(1 + e^{\theta_3}) \ldots (1 + e^{\theta_d}) = \sum_{\nu \in \{0,1\}^d} e^{\Theta_\nu}$$

dove $\nu = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_d)$ dove $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$ ($\nu \in \{0, 1\}^d$), e

$$\Theta_\nu = \varepsilon_1 \theta_1 + \varepsilon_2 \theta_2 + \varepsilon_3 \theta_4 + \cdots + \varepsilon_d \theta_d \quad (\in \mathbb{C})$$

Alcuni di questi Θ_ν sono nulli (per esempio per $\nu = (0, 0, 0, \ldots, 0)$ e $\nu = (1, 1, 0, \ldots, 0)$). Indichiamo con n il numero di termini Θ_ν non nulli, indicandoli per semplicità con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Allora l'espressione $\mathcal{E}$ si scrive

$$\mathcal{E} = q + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + e^{\alpha_3} + \cdots + +e^{\alpha_n}, \quad q = 2^d - n.$$

D'altra parte $e^{\mathtt{i}\pi} = -1$ e quindi abbiamo

$$\mathcal{E} = q + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + e^{\alpha_3} + \cdots + e^{\alpha_n} = 0.$$

Introduciamo ora la quantità

$$J = I(\alpha_1) + I(\alpha_2) + \cdots + I(\alpha_n) = -q\, P(0) - \sum_{k=1}^{n} P(\alpha_k)$$

con (con le stesse notazioni precedenti) $P(z) = \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(z)$, dove il polinomio, di grado $m = (n+1)p - 1$, $f(z)$ è

$$f(z) = \ell^{np}\, z^{p-1}(z - \alpha_1)^p (z - \alpha_2)^p (z - \alpha_3)^p \cdots (z - \alpha_n)^p$$

dove ℓ è il coefficiente di grado massimo ($= d$) di $M(z)$. Come nel caso di e risulta che

$$\begin{cases} f^{(j)}(0) = 0 & j < p - 1 \\ f^{(p-1)}(0) = \ell^n (-1)^{np} (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n)^p & \\ f^{(j)}(\alpha_i) = 0 & j < p \end{cases}$$

da cui

$$J = -q\,\ell^n(-1)^{np}(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)^p(p-1)! + p!\,\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{C}$$

che si può più convenientemente scrivere

$$J = (p-1)!\Big(-q\,\ell^n(-1)^{np}(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)^p + p\,\gamma\Big), \quad \gamma \in \mathbb{C}$$

con

$$p!\,\gamma = -q\sum_{j=p} f^{(j)}(0) - \sum_{j=p}^{m}\sum_{k=1}^{n} f^{(j)}(\alpha_k)$$

Ora si osservi che i coefficienti del polinomio $f(z)$ sono polinomi simmetrici in $\ell\,\alpha_1, \ell\,\alpha_2, \ell\,\alpha_3, \ldots, \ell\,\alpha_n$, quindi sono polinomi simmetrici anche in $\ell\,\Theta_\nu,\ \nu \in \{0,1\}^d$ e quindi infine sono polinomi simmetrici in

$$\ell\,\theta_1, \ell\,\theta_2, \ell\,\theta_3, \ldots, \ell\,\theta_d.$$

Applicando il teorema che ogni polinomio simmetrico in n variabili si può scrivere come polinomio nei polinomi fondamentali abbiamo che i coefficienti di $f(z)$ sono interi e prendendo p sufficientemente grande otteniamo che

$$|J| \geq (p-1)!. \tag{1}$$

D'altra parte dalla disuguaglianza

$$|I(t)| \leq |t|\,e^{|t|}\bar{f}(|t|)$$

otteniamo

$$|J| \leq C^p$$

che è incompatibile con la (1) per p grande.

Concludiamo che $\mathtt{i}\pi$ è trascendente e quindi anche π è trascendente.